

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Főiskolai Tanszék
Esti Tagozat

Szemléltetés a matematikában

Készítette:

Németh Nándor
Budapest, 2004

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A szemléltetés története.....	4
3. A látás	12
3.1. A látási észlelés funkciói	13
4. A szemléltetés didaktikai háttere.....	15
4.1. Verbalitás	20
4.2. Nem verbális eszközök.....	21
4.3. Az ábrák szerepe.....	22
5. Szemléltetés az oktatás egyéb területein	24
5.1. Diszkalkulia.....	24
5.1.1. A terápiában használható szemléltetőeszközök	27
6. Szemléltetés a matematikában.....	29
6.1. Oktatást segítő környezet	29
6.2. A matematikatanulás alapelvei	31
6.3. A szemléltetés szerepe a matematikában	32
6.4. Gyakorlati lehetőségek	34
6.4.1. Papírhajtogatás	34
6.4.2. Testek	41
6.4.3. Sokszögek, síkidomok	49
6.4.4. Matematika és művészetek.....	52
6.4.5. Valóságközei feladatok, a valóság szemléltetése	54
6.4.6. Algebrai egyenletek szemléltetése.....	56
7. Összefoglalás	59
Melléklet.....	61
1. számú melléklet: Tablók	62
2. számú melléklet: Poliéderek.....	63
3. számú melléklet: Valóságközei feladatok	68
Irodalomjegyzék.....	70

1. Bevezetés

Szemléletesség és matematika. E két fogalom látszólag ellentéte egymásnak, valójában a szemléletesség teszi teljessé a matematika oktatását. A matematika tanulása nagyon gyakran ütközik nehézségekbe, életidegen, elvont megközelítése miatt. Hogyan lehetne ezen változtatni? Hogyan lehetne a matematikát a gyerekekkel megszerettetni? Mit kellene tenni annak érdekében, hogy a tanuló legalább olyan szívesen üljön be egy matematika órára, mint egy környezetismeretre vagy egy földrajzra? Érdekessé, izgalmassá kell tenni az órákat. A matematika adta lehetőségek közül ezt a célt szemléltetéssel lehetséges elérni vagy legalább megközelíteni. A szemléletesség azonban más lehetőségeket is tartogat a matematika számára. Általa a nehéz fogalmak könnyebben érthetővé, a eljárások egyszerűbbé, a feladatok „kellemesebbé” válnak. A könnyebb, életközelibb feladatok lelkesedést váltanak ki, ami szintén jó hatással van a tantárgy körül kialakuló légkörre.

A szemléltetés, mint módszer mára általánosan elismertté vált és kialakult egy gyakorlat, ahogy és amennyit az általános oktatásban szemléltetni „illik”. Szakdolgozatom célja, hogy átfogó képet alkosson a szemléletességről, ismertesse fiziológiai, pszichológiai és didaktikai hátterét, beszámoljon a matematikában elfoglalt helyéről, bemutasson szokványosabb és néhány érdekes, kevésbé ismert példát.

2. A szemléltetés története

A szemléltetés egyidős az emberrel. Már az ősember is alkalmazta, amikor a barlang falára felrajzolta környezete élőlényeit, vagy említhetnénk a mennyiségek szemléltetésére húzott rovátkák használatát, majd később a szám- és írásjelek kialakulását. Korán felismerték szerepét, azonban elismertsége sokat változott az elmúlt évszázadokban. A technika fejletlensége, a lehetőségek szűkössége útját állta a demonstráció, mint oktatási eszköz fejlődésének. Leginkább a természetből az iskolába vitt tárgyakról beszélhetünk, úgymint ásványok, növények. Később a bemutató képek elterjedését a bálványimádattól félő egyház késleltette. Az első ismert pedagógus, aki feldolgozta, alkalmazta és népszerűsítette a demonstrációt Comenius (1675). Kidolgozta alapelveit és elindította a szenzualista pedagógiát. Célja, hogy a gyermek számára lehetővé tegye a találkozást a valóságos világgal, megkímélve őt a mások által már feldolgozott, közvetített ismeretrendszer egyoldalúságától. „A tanítás ne a dolgok szóbeli elbeszélésével vegye kezdetét, hanem a reális megfigyeléssel. Miután megmutattuk a dolgot, jöhet a bővebb magyarázat”. A tanítónak és tanítványnak egyaránt kedvteléssel járjon a tanítás-tanulás folyamata, emellett szilárd ismeretet adjon. Ez könnyen elérhető: „...annyi érzékszervet kell használni, ahányat csak lehet”. Comenius felismerte, a tanulás sokkal könnyebb és mélyebb, ha nem egyoldalú verbális, hanem szemléltető, a lehető legtöbb érzékszervünkre ható oktatást alkalmazunk. A tananyag könnyebbnek tetszik majd, s ha azt is megvilágítjuk, mi a haszna a gyakorlati életben, nem okoz majd fáradtságot elsajátítása. A bemutatásra elég időt kell fordítani, „míg a szemlélő mindent a maga sajátosságával együtt helyesen fel nem fog”, nincs különben értelme. Ráadásul fegyelmezési problémáktól sem kell tartanunk, a gyermekek figyelmét a szemléltető eszközök kötik le. Comenius Seneca szavait idézi: „Hosszú és nehéz az út a szabályokon keresztül, könnyű és hatásos a példákon át”

„Az iskola belül világos legyen, tiszta, mindenütt képekkel díszítve. Ha így rendezzük el a dolgokat, nem jelent kisebb örömet iskolába járni, mint ahogy a vásárba szokás, ahol mindig azt remélik, hogy valami újat fognak látni és hallani.”

A szemléltetés hasznosságát egyre többen fedezték fel, bár inkább a képeket használták, ennek tulajdonítottak nagy jelentőséget.

„...díszítő célzattal falra függesztett képeket a gyerekek minő gyönyörűséggel fogadják. Önszántukból is nézik, csodálják, vizsgálják és sok mindent tanulnak is általa”¹

A módszer hangsúlyozása egyre erőteljesebbé vált: „Az értelmes és világos szemléltetést joggal nevezhetjük minden rendezett szellemi tevékenység, minden ismeret kútforrásának és alapjának. Ha a szemlélési gyakorlatok helyesek, a gyermek a szemlélés által a képzeteket, a képzetekből fogalmakat, a fogalmakból szavakat, a szavakból mondatokat nyer”²

Magyarországon a XIX.század közepéig inkább csak utalásokat találunk a szemléletességre, később egyre több helyen találkozhatunk leírásokat kiegészítő képekkel. A XVIII-XIX.század fordulóján jelenik meg a Természethistóriai Képeskönyv, mely „az állatok, növények, virágok, gyümölcsök és ásványok képeit, a mesterségek és tudományok sok más oktatásra összeválogatott tárgyaival együtt, igen jó eredeti munkák szerint kimetszve, az ifjúság értékéhez alkalmazott tudományos magyarázattal”. Ebben kifestett képeket találunk bőséges leírással.

Bolyai Farkas így ír a demonstrációról 1831-ben: „Csak mindenkor mindent ki kell, amit lehet, mutatni, s kézzel foghatóvá tenni, amennyire lehet, s az egyesről menni a közönségesre és amíg egyet jól meg nem értenek, többre menni nem kell. A mechanikában minél több modellát kell mutatni, s velek kicsináltatni”

Ebben az időben terjednek el széles körben a tanterem felszereltségéhez tartozó eszközök: „Az iskola szükséges kellékek- és készülékekhez tartoznak még a következők: egy vászontábla vonalokkal,

¹ Lukács Gyula: Az iskola szépsége

² Boglári: Szemléltető oktatás a népiskolában

mellyen hol a gyerekek tanulnak írni, hol meg a tanító ír föl, és mutat egyet s mást a tanítás tárgyaihoz képest. Egy másik hasonlóképp feketére füstött vagy mi jobb pánzolt a számolás szolgálatára szolgálendő. Egy betűismertető és szótaglaló tábla. A különféle példányiratok, mind az ékesírásra, mind a közhasznú irományok készítésének módjára használhatók. Egy földgolyó, s ha több nem, legalább Európa és Magyarország földabrosza: kréta, szivacs, egy kis könnyű pálczika, betűket, számjegyeket, s földabroszon tájékokat mutatni. Végten ha több nem, legalább egy kép is legyen az iskolában, például olyan, mely Krisztus urunkot azon körülményben ábrázolja, midőn a kisdedeket megáldotta...”³

Egy 1869-es nevelés- és tanítástani dokumentum a népiskolai oktatás első két évében a szemléltetés nyolc fokozatát különbözteti meg:

- 1.) tárgyak szemléltetése
- 2.) tárgyak száma
- 3.) tárgyak minőségei
- 4.) tárgyak cselekvése
- 5.) cselekvések meghatározásai
- 6.) ok, okozat meghatározása
- 7.) érzéki tulajdonságok kifejtése és értelmezése
- 8.) szellemi, erkölcsi tulajdonságok kifejtése és értelmezése

Szintén ebből az időből két másik könyv a szemléltetés módját és értelmét írja le: „Mielőtt a könyvekből való oktatást elkezdenénk, alkalmas gyakorlatokkal a gyerekeket az oktatás befogadására elő kell készíteni. Erre szolgál a beszéd- és értelemgyakorlatok, vagy helyesebben az önálló szemléltető oktatás. A szemléltető oktatás lényege abban áll, hogy a gyermekeknek megmutatunk valamely tárgyat, s aztán arra indítjuk, hogy mondja meg, miképp néz ki e tárgy? Számlálja elő annak részeit? Mondja meg, hogy miből van? Mire és miképp használtatik? Aztán, ha a gyermek több tárgyat is látott, az egyes tárgyakat egymással összehasonlítja, s elmondja

³ Általános tanítástudomány a mesterképző intézetek számára

azok hasonlóságait és különbségeit.”⁴ A szemléltető oktatás célja az érzékek élesítése, az értelem fejlesztése, a nyelv képzése és gazdagítása.

„Beszéd- és értelemgyakorlatoknak vagy szemléltető oktatásnak, a tanítás azon részét nevezzük, amely által a gyermekek szemlélő-, gondolkodó- és beszédképességüket fejleszteni iparkodunk.”⁵ A szemléltetés vezetésében követendő tanácsok: ha lehetséges, a természetben szemléltessük a tárgyat, kerüljük a túlságos vagy meggondolatlan kiterjesztést, legyünk tekintettel a gyakorlati életre és fordítsunk külön gondot a beszéd és egyéb tehetségek képzésére. „Szemléltetéshez valóságos tárgyak, ábrák használhatóak. Legjobb szemléltető eszköz maga a tárgy a természetben, mert ez lehetőséget nyújt arra, hogy több érzékszervvel vizsgálja a gyermek, míg a kép, ábra csak egyoldali szemléletet nyújt..., ha ismeretlen tárgyakat mutatunk, akkor azokat élethűen színezett képek segítségével tesszük”⁶

Ugyan még csak a természetbeni szemléltetéssel kapcsolatban, de megjelenik az a gondolat, hogy sokkal hasznosabb a bemutatás, ha nem csak vizuálisan hat a gyermekekre. Wurga János így ír (1871): „A szemlélet fejlesztése különösen fontos a látás és hallás által. A szemléltetés a tárgyat természetiségében mutatja be, érdekes, kedves legyen, a gyermek korához, kedvéhez igazodjon. A hallás által történő szemlélet kiegészíti a látással szerzett tapasztalatot, mert ez már dolog- és szószemlélet együtt, így a szó és gondolat egyszerre fejlődik a gyerek lelkében.” Egy másik szerző szerint most már a szemlélet általánosan bármely érzékszervvel szerzett érzéki hatás felfogását jelenti.

A szakmai közfelfogás hamarosan az oktatás középpontjába emelte a szemléltetést:

„Az oktatás didaktikai alapelvei közül a legfontosabb a szemléletiség elve.”⁷

Comenius szerint: „A dolgok teszik a lényegét, a szavak mellékesek, a példák előzzék meg a szabályokat, mindenek előtt az értelemre kell hatni és csak ezután az elmére és a nyelvképzésre, a legelső az érzékelés, azután

⁴ Környei János: A tanító az iskolában

⁵ Bárány Ignác: Tanítók könyve

⁶ Bárány Ignác: Tanítók könyve

⁷ Bihari Péter: Népiskolai oktatás

következhettek az elmére, az értelemre és utoljára az ítéletre hatás... mindent szemléletileg tanítsunk."

„A hosszú magyarázat és körülírás, legyen bármennyire élénk és figyelemlekötő is, bizony csak szó, amely legtöbbször elröppen. A látott és megfigyelt jelenségek sokkal jobban megmaradnak az emlékezetünkben”⁸

„A mai iskolai oktatás átka a túlzásba vitt verbalizmus”⁹

„Nincs a népiskolának olyan tantárgya, amiben a szemléltetés felesleges lenne, még úgy is lehet mondani, hogy a szemléltetés szerint rendezhető a tananyag”¹⁰

Ez utóbbi megállapodással szemben áll Verédy Károly következő kijelentése, ami bizonyítja, hogy akadtak olyanok is, akik teljesen máshogy gondolták a bemutatás szerepét az oktatásban: „Elvont dolgoknál szemléltetésről szó sem lehet, és a vallástan, történelem, számtan, nyelvtan fölött a növendék csak elmélkedhet...”

A kezdeti lelkesedés és a demonstráció túlzott alkalmazásának következményei felszínre kerülését követően egyre többen arany középutat kerestek a szemléltetés oktatásban elfoglalt helyével kapcsolatban.

„A figyelem élénkítésére legalkalmasabb eszköz a szemléltetés. De ebben is kellő mértéket kell tartania minden tanítónak, nehogy a tanítvány a dolgoknak csak a külsejét vizsgálja, fogja fel, a lényegét pedig, a dolog magvát figyelmen kívül hagyja.”¹¹

„A folytonos szemléltetés, azaz az érzékek folytonos foglalkoztatása csak szórakoztatás, mely nyomot sem hagy a gyermek lelkében. A szemléltetéshez mindig hozzá kell tenni az értelmi munkát.”¹²

⁸ Jung Miklós: Szemléltető szemléltetés

⁹ Fogl János: Ecce Avena!

¹⁰ Bihari Péter: Népiskolai oktatástan

¹¹ Hofbauer Ignác: Hogyan lehet az iskolában a gyermek figyelmét ébren tartani?

¹² Wessely Ödön: Népiskolai neveléstan, tanítástan és módszertan

„Azonban korántsem kell azt gondolnunk, hogy a szemléltetési tárgyak bemutatása már kész tanítás, teljes eredmény. Bármit szemléltetünk, mindig arra kell törekednünk, hogy a szemléltetett tárgy sajátos tulajdonságait emeljük ki. A szemléltetés korántsem cél, csupán eszköz a tanításban, a fogalmak kialakításának, a megértésnek egyik nagy elősegítője.”¹³

A tárgygyűjtemények, kis iskolai múzeumok létrehozásának igénye már a századfordulón felmerült. A szemléltetéshez használt tárgyak bővítését sokan szerették volna elérni, de ez akkor is, most is leginkább a pénzügyi lehetőségeken múlt. A fejlődés mégis óriási, míg 1886-ban Bihari Péter: Népiskolai oktatástan című könyvében saját készítésű eszközök, szobrok, képek, fényképek, rajzok, faliképek, térképek és földgömbök használatát látja indokoltnak, addig hatvan évvel később már bemutatásra kerülő tárgyak, képek, diapozitívok, filmek, kartogramok, vázlatok, táblázatok, diagrammok tanítása, táblai rajz, kísérletek és sajátkészítésű segédeszközök elterjedéséről beszélhetünk. Ki kell emelni a kísérletek megjelenését, amely nagyot lendített a szemléltetés helyzetén. Általa egy rendkívül hatékony, szemléletes, a gyerekek által is használható, számukra is érdekes eszköz birtokába kerültünk.

A századforduló környékén már néhány technikai vívmány is beszivárog az iskolába. Ennek egyik legjobb példája a szkioptikon vetítőgép, amely már olcsó szemléltető eszköznek számított akkoriban. Így írnak tapasztalataikról: „A kivetített kép közelebb áll a természethez, mint a közönséges kép. A tárgyakat, jelenségeket, állatokat, embereket, növényeket stb. természetes nagyságukban lehet kivetítve látni, s ha színezés is járul hozzá, akkor valóban a természethez leginkább hasonlító képet kapunk. A növények és állatok fejlődése a legapróbb, szabad szemmel nem is látható jelenségeiben is vetített képpel nagyítva szemlélhető. Képvetítés esetén a gyermek figyelme jobban összpontosul. A gyermekek az elsötétített szobában feszült figyelemmel lesik a kép megjelenését. Semmi más nem vonja el az érdeklődésüket, s a vetített kép tisztaságánál és élességénél fogva teljesen leköti őket. A hagyományos képekkel szemben az is nagy előnyük, hogy a

¹³ Pálinkás Béla: Elemi népiskolai tanítástan

gyermekek előzőleg nem nézegetik, mielőtt a tanító magyarázatában odáig jut, hogy figyelemmel tudják az előadást követni.”¹⁴

Néhány általánosan fontosnak tartott gondolat:

A külső és belső észrevétel. Nem szabad megengedni, hogy a gyermek elé tárt bemutatás megmaradjon az érzékek szintjén. A gyermeknek gondolkodnia kell, kapcsolódásokat, rendszerezést kell felfedeznie, fogalmakat kell alkotnia. Ehhez nyújt segítséget a tanító szóbeli közlése. Nem véletlen, hogy hamar felfedezték, a szemléltetés félkarú óriás verbalitás nélkül. A bemutatás nem lehet cél, csak eszköz. „A szemléltetéssel elő kell segíteni a tanítónak, hogy a tanulók saját szellemi tevékenységükkel tegyenek szert elvont fogalmakra”¹⁵, „a belső szemléltetés legfőbb eszköze a tanító élő beszéde”¹⁶

A gyermek beszélgetése. A pedagógus folyamatosan ellenőrizze a gyermekben kiváltott hatást, a megértés fokát, tartalmát. Ha a szemléltetés sikeres volt és a tanulók megértették az anyagot, következzen annak begyakoroltatása!

Bemutatás a természetben. Sose hozzuk a tanterembe, amit a természetben is tudunk szemléltetni. Próbáljuk a tárgyakat, jelenségeket saját környezetükben megfigyelni. Hitelesebb, jellemzőbb, hasznosabb, érdekesebb. Néhány pedagógus tanévenkénti 5-7 sétát, kirándulást ajánl a cél érdekében.

A szemléltetés technikája. Egyszerre csak egy tárgyat, jelenséget, folyamatot mutassunk be, kerüljük a zsúfoltságot. Hagyjunk időt a szemlélődésre és a gondolkodásra. Készítsük tanulóinkat cselekvésre.

Találhatunk néhány érdekességet is a szemléltetés történetéből:

„Képeket csak ott alkalmazzunk, ahol a valóságot, a modelleket nem tudjuk bemutatni. A képeket ne állandóan tegyük ki közszemlére, csak a tárgykör tanítása idejére. Helyes, ha a képeket a valóságos tárggyal összehasonlítjuk,

¹⁴ Szemléltetés a mai iskolában (1907)

¹⁵ Mennyei József: Nevelés és tanítástan...

¹⁶ Drozdy Gyula – Frank Antal: Neveléstan, tanítástan módszertanító és tanítóképző-intézetek...

hogyan a gyermek megtanuljon a képről a valóság nagyságára, arányaira következtetni”¹⁷

A képekről Lóczy Lajos egyetemi tanár ekképp vélekedett : „A jó festvényt mindenféle fényképnél hasznosabbnak tartom, mert hiszen a fénykép mindent, tehát a fölöslegeset és a nem jellemzőt is tartalmazza, és részleteinek sokasága sokszor a jellemzőt elnyomja, míg a festvény a legfontosabbat ábrázolni van hivatva”. Lukács Gyula azt írja (1907), hogy a szemléltetés sokkal könnyebb a fővárosban, hiszen - sok egyéb mellett - ott vannak a kirakatok! „Ez utóbbiak gondos szülői vezetés mellett kitűnően beválnak, mint szemléltető eszközök.”

Egy gondos tanács a századfordulóról: „A szemléltetéshez használt kép lehetőleg művészi kivitelű is legyen, hogy a gyermek esztétikai ízlését is fejlessze.”¹⁸ Az ilyen jellegű funkciókra régebben sokkal nagyobb hangsúlyt fektettek, mint manapság. Korunkban is elkelne az effajta gondolkodás annak érdekében, hogy tanítványaink megtalálják a körülöttünk lévő világ egyszerű dolgaiban is a szépséget.

¹⁷ Képek jelentősége a népiskolában

¹⁸ Dr. Ádám Sándor: Taneszközök Magyarországon

3. A látás

Az emberi érzékelés hat megvalósulása közül a legfinomabban kidolgozott és a tanulás szempontjából legfontosabb a látás. A körülöttünk lévő világ megismerése elképzelhetetlen, a gyermek egészséges fejlődése lehetetlen a szem által begyűjtött információk nélkül. Természetesen a tanulásban is kiemelt szerepet tulajdonítunk a látásnak, elég csak a tankönyvekre, feladatlapokra vagy az iskolai táblára gondolni. Látásunk örökletes, de tanult tulajdonság is, amelyet a születés utáni időszak tapasztalatai formálnak. Minősége adottságaink és környezetünk összjátékaként, hosszúira nyúló - több elkülöníthető szakaszt magában foglaló - úgynevezett kritikus érési-tanulási periódusban alakul ki. A látóingert szállító idegrostok teljes kifejlődése valamint a látókéreg differenciálódása csak megfelelő mennyiségű és minőségű látási információk által valósul meg. A látórendszer úgynevezett stabilizációja a fent említett ingerek nélkül elmarad, így a látás működése hiányossá válhat a későbbiekben (asszociációs képességek, térlátás). „Pszichológiai vizsgálatok és pedagógiai tapasztalatok is igazolják, hogy ingerszegény környezetben nevelkedett emberek látása és látáskultúrája messze alatta marad a megfelelő információs környezetben felnőttekének.”¹⁹. Hámori József így fogalmaz: „a látás következetes pedagógiai gondozást, fejlesztést igénylő képességrendszer”. A szemléltetés tehát kétcélú és kéteredményű. Egyrészt könnyebbé kívánjuk tenni a tananyag megértését, érdekesebbé az órákat melynek eredményeképpen jobb teljesítményt, nagyobb odafigyelést és kellemesebb légkört várunk, másrészt feladatunk a diákok látásának fejlesztése, ingergazdag környezet létrehozása által. A gyermekek későbbi tanulmányaik során nagyban támaszkodhatnak a jó látáskésztségre, koordinációs képességükre.

¹⁹ Hámori József: Az idegsejttől a gondolatig

3.1. A látási észlelés funkciói

A vizuális észlelőrendszer két fő feladata a látómezőbe került tárgyak azonosítása és térbeli helyzetük megállapítása. Ez alapján beszélhetünk alak- és mintafelismerésről, valamint téri lokalizációról, melyeket részfunkciókra bonthatunk. Elsőként a *térlátásról* kell szólni. Alapja a két szem által az agyba juttatott két eltérő kép, a retina felbontóképessége, a mozgás érzékelése és közvetlen észlelés. Relatív nagyság, takarás, relatív magassági helyzet, perspektíva, térmélység és távolság fogalma kapcsolható a háromdimenziós látáshoz, melyek a matematikában és az oktatás más területein is nagy szerepet kapnak.

A dolgok tulajdonságainak állandóságát az *észlelési konstanciáknak* köszönhetjük. A távolodó autót nem gondoljuk egyre kisebbnek, a forduló repülő nem változtatja az alakját és futás közben is állónak látjuk a fákat. A korábbi tapasztalatokra, emlékekre támaszkodva éri el agyunk, hogy a szembe érkező képek folyamatos változása ellenére a tárgyakat és tulajdonságaikat konstansnak tekintjük. Megkülönböztetünk alak-, világosság-, szín- és helykonstanciát a jellemző tulajdonság állandósága alapján.

Illúzióknak nevezzük azt a jelenséget amikor a megszokott konstanciát megzavarja a tárgyak, alakok és a környezet közötti viszony szokatlansága - lehetetlen testek, absztrakt festmények segítségével a matematikában is kelthetünk illúziót.

A harmadik részfunkció a *viszonylatok észlelése*, amely lehetővé teszi a dolgok közti különbségek értelmezését. Mindig szükség van egy referenciára, amihez viszonyítunk. A térszemléletünk számára szükséges kiindulási pont általában önmagunk. Ezért nem okoz nehézséget megérteni az euklidészi geometriát, hiszen lényegében megegyezik saját térvizonyunkkal. Matematikai szempontból kisebb jelentőségű a *mozgásészlelés* és a *színlátás*. Előbbi rendkívül bonyolult, a szem apró, letapogató mozgásaitól kezdve az

izomérzékletekig nagyon sok összetevős, utóbbi inkább az ingergazdag szemléltetés szempontjából juthat szerephez, hiszen a sokszínű ábrák, képek és tárgyak vonzzák a tekintetet, érdeklődést keltenek. Egy matematikai feladatban szerephez juthatnak például a kombinatorika területén, a „Hány féleképpen színezhethénk...” kezdetű példákkal kapcsolatban. A tárgyakat környezetükből kiemeli, ezzel értelmezhetővé teszi és a többi részfunkciót segíti az *alaklás*, a tárgyak elkülönítése. Felismerhetővé teszi a térbeli és síkbeli elrendeződéseket, szimmetriákat, a közelséget, egyenlőséget, egymásmellettséget és ez alapján csoportosításokra képes. Alapja a fényinger-különbség, összetevői a látásélesség és kontrasztérzékenység, a jó folytatás - amely a hiányzó részek mellett is felismerhetővé tesz egy tárgyat. Szemléltetéskor a hat alapfunkcióra, különösen a térlátásra, az észlelési konstanciákra és az alaklásra támaszkodhatunk.

4. A szemléltetés didaktikai háttere

Az eltelt bő száz év alatt sokat fejlődött, finomodott, tisztult a szemléltetés tudománya, köszönhetően elsősorban a nagy technikai, technológiai fejlődésnek és a gyermekről, a nevelésről, tanításról a alkotott kép megváltozásának.

A szemléltetés egészen a mai napig őrzi előkelő helyét az oktatás folyamatában és ez - főként az internet elterjedése és az általa adott lehetőségek bővülésének következtében - csak erősödhet.

A bemutatásnak a tanulás minden fázisában jelen kell lennie, kísérnie kell azt. Minden lehetőséget meg kell ragadni a tartalmas, szemléletes óra elérésének érdekében. A manapság széles körben elfogadott nézet szerint a szemléltetés módszere:

- 1.) fejleszti a képszerű, szemléletes gondolkodást
- 2.) megalapozza a fogalomalkotást
- 3.) segíti a tevékenység elsajátítását
- 4.) rámutat a gyakorlati alkalmazás lehetőségeire
- 5.) rendszerez, osztályoz
- 6.) felkelti a tanulók érdeklődését
- 7.) segíti a tanultak alkalmazását

Végezhetünk tanári demonstrációt vagy bevonhatjuk a gyerekeket is.

	TANÁRI	EGYÜTT VÉGZETT
Előnyök	gyorsabb	szemléletesebb
	jobban kontrollálható	gyerekek maguk csinálják
	magyarázatok, hozzáfűzések, kommentárok könnyebben, pontosabban eljutnak a diákokhoz	képességfejlesztő, motiváló, fejleszti a gyakorlati problémamegoldást
		tanuló irányítja saját megfigyeléseit
		figyelmét jobban leköti
Hátrányok	unalmasabb	nehézkesebb, lassabb
	kevesebb célt szolgál	nehezebben irányítható
		a gyerekek könnyen eltérhetnek a tárgytól, ezért erősebb kontrollt igényel
		megosztott figyelmet követel
		több eszközre van szükség

Mind szellemi mind technikai értelemben fontos a jó felkészülés. Ha a szemléltetőeszköz nem drága és otthon viszonylag könnyen előállítható, akkor elkészítése „ráterhelhető” a diákra, ami további előnyökkel jár: ügyességfejlesztő, a tananyag elsajátítását segíti, új ötletekkel gazdagodhat, felfrissíti korábbi ismereteit, ami biztosíték lehet a gyors haladásra a következő tanórán.

A tanárnak szervesen be kell építenie az oktatás folyamatába és az adott órába a demonstrációt, nem sokat ér ugyanis a módszer, ha az nem vagy csak kis mértékben kapcsolódik az aktuális tanulmányokba. Az órát érdekessé teheti és ezért alkalomszerűen, rövid időtartamra (például ösztönzés, fáradt tanulók „felébresztése”) alkalmazható, de gyakorlati haszna kétséges. Ideális esetben kapcsolódik a korábbi, az aktuális és a következő anyagrészhez mintegy nyomatékosítva a közöttük fennálló összefüggéseket, kapcsolatokat. Jó, ha harmonizál a korábban használt módszerekkel: nem előnyös például, ha egy erős tanári vezetéshez, dominanciához szokott osztály hirtelen, minden átvezetés nélkül túl nagy szabadságot kap és a szemléltetőeszközökkel önállóan kell feladatot végeznie, azt vizsgálnia.

Azonban a demonstrációs óra sem lehet egyoldalú. Ha nem érkezik kellő mennyiségű verbális információ, a tanítás nem valósul meg, a tanuló nem látja az értelmet, a célt, az összefüggéseket, az óra szabad játszóház jelleget ölt. A módszer ne egyoldalúan gyermekszórakoztató, „felvidítő” foglalatosság legyen, késztesen gondolkodásra, rendszerezzen, maradjon később is hasznosítható nyoma. A tanuló mindig értse a demonstráció célját, ő is gondolja úgy, hogy számára valamilyen formában segítséget nyújtunk, amibe kapaszkodni tud nem csak a jelenben, de későbbi tanulmányai és élete során is. Értjük el figyelemben és érdeklődésben megnyilvánuló támogatását, késztesük aktivitásra, hiszen ez a megértés egyik kulcsa.

Mindig a célnak megfelelő csatornát válasszuk. Látnivalót vizuálisan, a hallani szükségeset akusztikusan, a statikus rendszert statikusan, a dinamikus dolgokat dinamikusan. Alapszabály, hogy minél több csatornán érkezik az információ, annál könnyebben és tartósabban marad meg az elmében, azonban óvakodjunk a túlzásoktól, nehogy a „bőség” elvonja a

figyelmet a lényegről. Hasonlóan a túl részletes szemléltető kép könnyen mellékes dolgokra irányítja a figyelmet.

Szemléltetés során biztosítsunk megfelelő mennyiségű időt a szemlélődésre, vizsgálatra, a lényeg lejegyzésére, az ábrák lerajzolására, a következmények átgondolására és a felmerülő kérdésekre. Ez utóbbi érdeklődést fejezhet ki jelezvén, hogy jó úton járunk, egyben irányít minket, felfedve a gyermekek érdeklődését, hozzáállását, ismereti szintjét, de azt is mutathatja, nem értik a szemléltetés lényegét, körülményeit, folyamatát, így saját hibáinkra hívja fel figyelmünket. Ha a tanuló kérdez, akkor az általunk kijelölt téma jár az eszében és nem máshol járnak gondolatai. Ha nem kérdez, kérdezzünk mi! Így ösztönözhetjük és visszajelzést kaphatunk. Válaszaink pontosak és átfogóak legyenek, szolgáljanak kiindulópontjául a további megfigyeléseknek. Törekedni kell arra, hogy a szemléltetés „vizuális, érzékszervi tengerében” a tanuló ne tévedjen el, minden percben tudja mit miért csinálunk. Emeljük ki a lényegét és vezessük őket mintegy fonal mentén, melytől eltérhetnek, de oda bármikor visszatalálnak.

Nagyrészt a technika és a technológia befolyásolja, de a pedagóguson múlik a demonstráció jó követhetőségének biztosítása. A bemutatásnak jól érzékelhetőnek, az eszközöknek jól láthatóknak kell lenniük még a legszélső és leghátsó padokból is, ezért használjunk nagyokat vagy használjunk többet. Ha erre nincs lehetőség, akkor próbáljuk meg az optimális helyzetet beállítani - például tv esetén helyezük magasra, a terem sarkába és húzzuk be a függönyöket. Élénk, kontrasztos színekkel környezetükből kiemelhetjük, egymástól jól, könnyen megkülönböztethetjük tárgyainkat, diákjainkat is színes szemléltetőeszközök használatára buzdítsuk, járjunk előttük jó példával, használjunk a táblára változatos színű krétákkal!

A szemléltetést két fő fajtáját különböztethetjük meg: közvetlen és közvetett megfigyelést. Előbbi tárgyak, folyamatok, jelenségek közvetlen bemutatását jelenti. Ha nem hozzuk tanítványainkat hátrányba, akkor mindig ezt válasszuk. Élethűbb, közvetlenebb, szemléletesebb, több érzékszervre hat. Ha nem tudjuk a szemléltetés e fajtáját biztosítani, vagy több előnnyel jár, közvetlen megfigyelést használjunk, ami oktatási szemléltetőeszközök

használatát takarja. Az utóbbi évtizedek technikai fejlődése és eljutása az iskolákba a lehetőségek megsokszorozódásával járt. A számítástechnika, internet, tömegkommunikáció, globalizáció lehetővé teszik korábban legfeljebb elmagyarázott folyamatok és jelenségek látását, hallását, érzékelését. Ezzel a világról egy rendszerezettebb, teljesebb, érthetőbb képet alkothatunk.

Törekedjünk arra, hogy tanulóinkat minél több fajta inger érje: a képi hatásokat egészítsük ki hanggal, a tárgyak legyenek megfoghatók, forgathatók esetleg szétszedhetőek, így több információt adnak, hitelesebbek, teljesebbek és a tanulást is jobban segítik.

A pedagógus viselkedése legyen könnyed, tanúsítson maga is kellő érdeklődést. Hagyja érvényesülni a gyerekeket, a tőlük származó ötletek hasznosak lehetnek számára is.

„Irányítsuk a figyelmet először a teljes tárgyra, s ellenőrizzük is, hogy kielégítő totális képet észlel-e minden tanuló. Ezután következik a részletes megfigyelés: a tárgy jellegéből adódó természetes sorrendben célszerű számba venni a minőségi, mennyiségi stb. jellemzőket, fő jegyeket. Ha olyan tárgyat mutatunk be, amelynek van első látásra szembeszökő, figyelemfelhívó tulajdonsága, akkor először ezt juttassuk érvényre, s a figyelemfölkeltés után kezdődjék a rendszeres elemzés, rámutatva arra is, hogy ami szembeszökő, az lehet lényegtelen tulajdonság, s a lényeg nem hagyja magát azonnal föltárni. Ilyen módon fejleszthetjük a tanulók spontán szelektív észlelését tervszerű megfigyeléssé.”²⁰

Ha mód van rá, a bemutatandó eszközt adjuk a gyermek kezébe. Legjobb megoldásnak az tűnik, ha két gyerek dolgozik egy csoportban a tárggyal. Segíthetnek egymásnak, több ötletük lehet, ezáltal gyorsabban rájönnek a megoldásra, elkészülnek a feladattal. Hármas vagy ennél nagyobb létszámú csoportot nem tartok kedvezőnek, kevésbé eredményesek, nagyobb lehetőséget ad a feladatra való koncentrálás csökkenésére, ráadásul a háttal ülő tanulók úgy érezhetik, kikerültek a tanári kontroll alól.

²⁰ Orosz Sándor: Korszerű tanítási módszerek

4.1. Verbalitás

- 1.) a pedagógus szóbeli közlés segítségével felveti a problémát, kijelöli a feladatot és irányítja a tanulók megfigyeléseit
- 2.) hozzásegíti a diákokat az összefüggések feltárásához, átgondolásához
- 3.) a szóbeli közlés megerősítésére vagy konkretizálására használja a szemléltetést
- 4.) közli a megfigyelésekből közvetlenül ki nem derülő összefüggéseket, általánosításokat
- 5.) szóbeli közlés segítségével összekapcsolja a szemléltetést a korábbi és az aktuális tananyaggal, előrevetíti a következményeket

A szemléltetés nem cél, hanem eszköz. Ezt nem szabad elfelejteni amikor a verbális csatornáról ejtünk szót. Nem érünk el eredményeket, ha a demonstráció egészét nem fedjük le szóbeli kommunikációval. Sőt, kiemelt szerepe van a bevezetésnek és az összefoglalásnak is. Szemléltetés előtt fel kell kelteni a gyerekek érdeklődését, kíváncsiságát (szükséges szenzibilitását). Ráhangoló lehet egy probléma felvetése, egy izgalmas - témához kapcsolódó - történet vagy akár egy megoldatlan kérdés. Állítások bizonyítását kevésbé tartom megfelelőnek, inkább unalmat vált ki, mint izgalmat. Ha a tanulók készen állnak, érdemes az aktuális feladattal kapcsolatos korábbi ismereteket röviden összefoglalni, megjelölni a célokat, tehát „képbe hozni” a gyerekeket. A későbbi általánosítások, összekapcsolások szempontjából ez alapvető fontosságú. Ha a tanulók és az eszközök is készen állnak, a körülmények megfelelők, kezdhethetjük a bemutatást. Ne beszéljünk feleslegesen sokat, nehogy elvonjuk a figyelmet a tárgyról, jelenségről, de mindig tudassuk mit és miért teszünk illetve mit tegyenek a gyerekek, mire figyeljenek. Egy-egy egység után foglaljuk össze a tudnivalókat, vetítsük elő a következő részt és hagyjunk megfelelő időt az új ismeretek, tapasztalatok átgondolására és lejegyzésére. „A sokat emlegetett elsődleges rögzítés”, elsődleges összefoglalás azt jelenti a bemutatáskor,

hogyan menet közben összefoglaljuk az egy vizsgálati szinten vagy megadott megfigyelési szempont szerint észlelt lényeges jegyeket". Ha nem tanári dominanciával dolgozunk, hanem hagyjuk a tanulókat szabadon vizsgálni és alkotni (és ekkor számíthatunk nagyobb érdeklődésre, motivációra - a kevésbé érdekes téma is jobban leköti a tanulót), akkor ravaszul, a helyes kérdések feltevésével befolyásoljuk, irányítjuk őket. Összefoglalásra, a tapasztalatok megbeszélésére ekkor is szükség van, a helyes megoldás(ok) és képzetek kialakulása érdekében. A szemléltetés egyes mozzanataihoz állíthatunk követelményeket, amiket a korábbi ismeretek és az addigi bemutatás alapján teljesítve a tanulóban erősen rögzülnek a tudnivalók.

4.2. Nem verbális eszközök

A szemléltetést kísérő verbális kommunikációt egészítsük ki nem verbális elemekkel. Például tárgyak bemutatásánál sokat segít, ha a nyelvi csatornát a tárgy alakját, méreteit, alkotóelemeinek irányát, hajlásszögét stb. követő-kiemelő kéz- és ujjmozdulatokkal kerekítjük ki. Szemkontaktussal információt szerzünk és tudatosítjuk tanulóinkban melyeket tekintünk fontos, lényeges elemeknek a szemléltetés során. Hasonló eredményű a hangmagasság, hangszín, hanglejtés eszközeink is.

4.3. Az ábrák szerepe

Az ábrák, sémák, diagrammok tanulást segítő hatásuk miatt az oktatás folyamatára kedvező hatással vannak. Szemben a beszéd egydimenziós sorrendiségével az ábrák kétdimenziós képet közvetítenek. Szóban az egyes kapcsolatokat csak egymás után tudjuk közölni, míg a vizuális szimbólum egyidejűsége nagymértékben hozzájárul a megértéshez, a fogalmak összefüggéseinek gyors tudatosításához. Világossága főként akkor érvényesül, amikor valaminek a struktúráját vagy térbeli kapcsolatait akarjuk kifejezni. Az ábrák megértést segítő szerepe azzal is összefügg, hogy alkalmazásukkal egyes területeken szóbeli információk tömege takarítható meg. Azonban negatív hatásokkal is számolnunk kell, ami abból következik, hogy az ábráknak a tanulásban erősebb hatása van, mint a szóbeli megfogalmazásnak. Vigyázni kell, hogy ne teremtsünk merev kapcsolatot ott, ahol a valóság mozgékonyt és változékonyt, változatost követel. Különben a tanulók nem fognak tudni elvonatkoztatni a túl sokszor vagy egyedül alkalmazott rajzok lényegtelen ismérveitől. A negatív hatás kiküszöböléséhez variálnunk kell a mértani idomok lényegtelen ismertető jegyeit. Egy másik hibalehetőség, amikor a tanulók nem azt látják, amit várunk tőlük, ilyenkor hiányozni fog a tanulás bázisa.

Problémák megoldása sokszor azáltal valósul meg, hogy a problémahelyzetet ábrán vázoljuk. Vázlatunk általában korábbi tapasztalataink készletéből is tartalmaz valamit és ezzel már irányt ad a gondolkodásunknak. A vizuális megjelenítés az ábra tartós szemlélésével, a részek összehasonlításával segítséget nyújt a problémahelyzet átstrukturálásához.

Az ábrák két fő feladata az oktatás folyamatában:

- 1.) a tanulás eszközei
- 2.) a tanulás tárgyai

A matematikai problémák megoldásában az ábrák szerepével kapcsolatosan Rókusfalvy Pál végzett vizsgálatokat. Megállapította, hogy a problémamegoldás kezdetén a feladat szövegének tanulmányozása nyújt alapot az ábra elkészítéséhez. Az ábra készülése alatt, vagy az ábra korrigálása közben tárulnak fel a feladat kikötéseinek esetleg rejtve maradt összefüggései, melyek ötleteket adhatnak a megoldáshoz. Az ábrán vázolt problémahelyzet ugyanúgy, mint a tanulásban a megértést segítő ábra, egyidejűleg szélesebb tartományt mutat a valóságból a szavak egymásutánosságával leírt helyzetnél. Az ábrákon együtt lehet látni azokat az összefüggéseket, kapcsolatokat, melyeket különben csak egymás után lehetne elgondolni. Jó térképzelettel belső képet is lehet alkotni és ezt szemlélni, de ez bizonytalanabb, mint a rajz. A problémahelyzet megjelenítése a gondolkodásnak irányt ad, ezzel azonban egyfajta tehetetlenség jár együtt, minthogy elvonja a figyelmet a gondolkodás lehetséges más irányairól. Sikertelen próbálkozások után viszont éppen az ábra segítségével valósulhat meg a probléma átstrukturálása, amely a tehetetlenséggel szemben hat. Az ábra a kikötések többszöri vizsgálatát, elemzését, esetleg átrendezését teszi lehetővé.

5. Szemléltetés az oktatás egyéb területein

Az oktatás néhány területén különösen nagy jelentőséget kap a szemléltetés. Ez a kiemelt helyzet nem emelhető át az általános iskola merev rendszerébe és nem is lenne célszerű, azonban érdemes a szemléltetést sokkal nagyobb mennyiségben használó intézmények és oktatási rendszerek felhalmozott tapasztalataiból levonni az általános iskolára vonatkoztatható következtetéseket. A matematika köréből példaként felhozható a diszkalkulias – számolásgyenge – gyerekek oktatásakor használt technika.

5.1. Diszkalkulia

Mihelyt a számolásgyenge gyerek átérzi saját helyzetét, felismeri gyengeségét, rögtön elhárító magatartást kezd tanúsítani a matematikával szemben. Ez a sok sikertelenségen és negatív tapasztalaton alapul.

A sikertelenség jelei a következők:

- 1.) a matematikai feladat megoldása majdnem mindig hibás
- 2.) a gyerek csak néha oldja meg helyesen a feladatát, a legtöbbször sokáig dolgozik, elréved, álmodozik közben és nem gyakorol eleget
- 3.) agresszív lesz, ha a számtanpéldára emlékeztetik, füzetét és könyvét dühösen a sarokba vágja
- 4.) minden matematikai munkánál hasfájást vagy fejfájást kap és ezzel gyakran el is éri, hogy ne kelljen iskolába mennie

Mindig sokáig tart, ami a számokkal és a számolással összefügg, mert ilyenkor leblokkol és ebből segítség nélkül nem tud kilábalni. Minden ilyen panasz mögött sok otthoni konfliktus rejtőzik. Elképzelhetjük azokat a jeleneteket, amik a házi feladat elkészítésekor vagy az iskolai feladatok láttán lezajlanak. A későbbi iskolaundor, az iskolába járás elutasítása gyakran

gyökerezik az ilyesfajta - az iskoláskor kezdetétől jelentkező - tanulási problémákban. Ezek állandósuló túlterheltségi helyzetet teremtenek. Idővel ezután ebből nincs kiút. A szülők természetes óhaja, hogy gyerekük jó tanuló legyen, mert ez jelent esélyt a sikeres élethez. A rossz helyzetből kivezető út lehet a tanulási terápia.

Sok tanulónak okoznak nehézséget a szöveges feladatok. Pedig ezek az ismert műveletek és a szaktárgyi összefüggések alkalmazását jelentik a valóság különböző helyzeteiben. Ezt az alkalmazást sok gyerek mesterségesnek és félrevezetőnek tartja, mert nem érzi magát otthon ezen a területen, kevés a tapasztalata ezzel kapcsolatban. Az a gondolat, hogy a matematika mindennapjaink segítője, fokozottan megnyilvánul a szöveges feladatokban. Gyakori az olyan probléma, amit matematikai eljárás segítségével lehet megoldani. Íme egy példa számrendszerünk szöveges ismertetésére:

„Tíz számjegyből (0-9) rengeteg szám építhető fel. Csak csodálni lehet, hogy ennek a tíz számjegynek segítségével micsoda hatalmas mennyiségű információ adható át, pl. a Zugspitze 2985 m magas, Münchenben 1456389 ember lakik stb. Eredetileg minden lakost egyenként kellett ábrázolni, vonással vagy ponttal jelölve. München esetében így biztosan számos oldalt foglaltak el a vonalak, ennek a nagy köteg papirosnak biztosan körülményes lehetett a kezelése. Könnyítésként használták azt a jelölési módot, hogy négy vonalat az ötödikkel áthúztak, tehát ötös kötegekkel dolgoztak, ötösével számoltak. A mi számrendszerünk, a tízes számrendszer tízes „kötegekből” áll, az ad lehetőséget arra, hogy nagy számokat fáradság nélkül írjunk le és számoljunk ki. Egy egység tíz tagja alkot mindig egy nagyobb egységet, tíz egyesből tízes lesz, tíz tízesből száz, tíz százsból ezres stb. Számrendszerünk második lényeges vonása a számjegyek pozíciója, azaz a számon belül elfoglalt helye (helyiértéke). Az utolsó számjegy az egyesek, az utolsó előtti a tízesek, az előtte lévő a századok helye. Ha pl. a 2 az utolsó előtti helyen áll, akkor húsz, ha hátulról a harmadik, akkor kétszáz.”²¹

²¹ Karin Elke Krüll: A diszkalkuliás (számolásgyenge) gyerekek

A matematikatanulás mindig a napi problémákból induljon ki. Ez motivál, értelmet ad a gyermek munkájának, belátását segíti, elkerülhető az unalmas, sematikus, gépies feladatmegoldás.

A diszkalkuliás gyerekek számára kitüntetett fontosságú a szemléltetés. A kezdeti időszakban cselekvésen és szemléltetésen alapul a matematikatanulás. Tízíg az ujjak is segítenek, százas számkörben más eszközök: logikai játék, számológép, számegyenes stb. Fontos, hogy az eszközök csak átmenetileg használhatók, a gyerek ne szokjon hozzájuk és ne függjön tőlük. A diszkalkuliás gyerekeknek hosszabb ideig van szüksége a szemléltetésre, de a legtöbbjük magától hagyja el az eszközöket, végzi fejben a műveleteket.

Az a gyerek, aki csak szemléltetőeszközzel tudja megoldani a tízes számkörben az összeadást, nyilvánvalóan nem tudja elképzelni a megoldást jelentő szám nagyságát. A számosságot, mennyiséget tárgyak formájában kell látnia, megnézéssel, esetleg cselekvéssel (tapintással) jut el a megoldáshoz. Cél a biztos támaszt jelentő eszköz segítségének elhagyása. Csak fokozatosan, gyakori eszközhasználat után alakul ki a mennyiség, számosság belső képe. Minden számhoz a személyiségre jellemző belső kép társul és ilyenkor már nem kell a tárgyakat megszámolni, mennyiségük egyre nyilvánvalóbb lesz, első pillantásra felismerhető. Ez bátorságot ad a gyerekeknek ahhoz, hogy spontán megoldással próbálkozzon, és ne ijedjen meg, ha néha hibázik. Fordítva is igaz: a szám megnevezése előhívja a belső képet, amivel tovább lehet dolgozni anélkül, hogy a szemléltetőeszközre szükség lenne.

5.1.1. A terápiában használható szemléltetőeszközök

Kockák, mágneses golyók

Mennyiségek megkülönböztetéséhez és összehasonlításához, változásához, globális felismeréshez (tízen belül) használható. A tárgyak száma variálható, bizonyos részük elvehető, letakarható, visszahelyezhető, némi idő után már számolás nélkül is megmondják a számukat. Kockákkal a cselekvés fáradtságosabb, ezért az absztrakció kialakulására gyorsító hatással van: a gyerekek inkább fejben számol!

Tízes egységek

Általában tíz feletti, esetenként öt fölötti mennyiségeket nehéz látás alapján azonosítani. Számrendszerünk mindig tíz elemet fog össze, melyet ez a fából készült készlet mutat be. Az egyeseket kockák, a tízeseket rudak, a százasokat lapok, az ezreket tömbök szemléltetnek, természetesen tíz rúd mérete megegyezik egy lapéval. Összeadási és kivonási műveletek gyakorlásához, a tízes számrendszer megértéséhez használhatjuk.

Helyiérték tábla

A táblázatban különböző rekeszek vannak az egyesek, tízesek, százasok részére. Könnyen felfogható a többjegyű számok számjegyeinek értéke és ezután könnyen le is írhatók. A gyermeket mindig tevékenysége, döntései magyarázatára, kommentálására kérjük!

Számegyenes

A számegyenesen minden szám fel van tüntetve, a tízeseket pedig kiemelik. Ezt használva a gyerekek az összeadást jobbra tartó, a kivonást

balra tartó mozgásként éli meg. A bal-jobb megkülönböztetésben bizonytalan gyerekekkel használjunk függőleges számegyenest! Ezen az összeadást felfelé a kivonást lefelé végezheti.

Abakusz

Keretben, egymás alatt tíz sorban, ezek mindegyikében tíz golyó sorakozik. Az első öt golyó minden sorban más színű, mint a második öt, megkönnyítve a feladatok optikai észlelését. A számosság globális felfogását, automatizálást segítő eszköz.

Fából készült számjegyek.

A három cm magas színes vagy lakkozott számjegyek akkor alkalmazhatók, ha a feladatot nem akarjuk írásban végeztetni, de jónak látjuk, ha a számjegyek a gyermek előtt láthatók.

A diszkalkuliában felhasznált demonstrációs eszközökre érvényes megállapítások:

- 1.) csak átmeneti ideig használható
- 2.) a cél a számok belső elképzelésének kialakítása, ha ezt elértük, akkor a gyermek maga rajzolhat vagy állíthat össze eszközöket - ne használja a megszokottakat, a kész tárgyakat
- 3.) nem cél, hogy a szemléltetőeszközöket abszolút biztonsággal használja a gyerek, sőt ez inkább káros, mert nem az eszközhasználatot, hanem a biztos megértést és a fejben való megoldást kell kialakítanunk
- 4.) figyelniünk kell arra, hogy ne lépjen fel eszközfüggőség, ezért az eszközös munka után fejben számolás következik akkor is, ha még nem tökéletes a megértés. Ezután ismét eszközzel dolgozunk a belső elképzelés javítására.

6. Szemléltetés a matematikában

A szemléletességnek a matematika tanításában is kiemelt helye van. A tanítási módszerek sokszor túl elméleti síkúak, a szemléltetés terhét és sokszor időigényességét a tanítók gyakran nem vállalják. Pedig a matematikai demonstráció nem csak a tananyag könnyebb megértését, elsajátítását, de a gondolkodás fejlődését, a térlátást, térszemléletet és a körülöttünk lévő egyre bonyolultabb világ megértését is elősegíti.

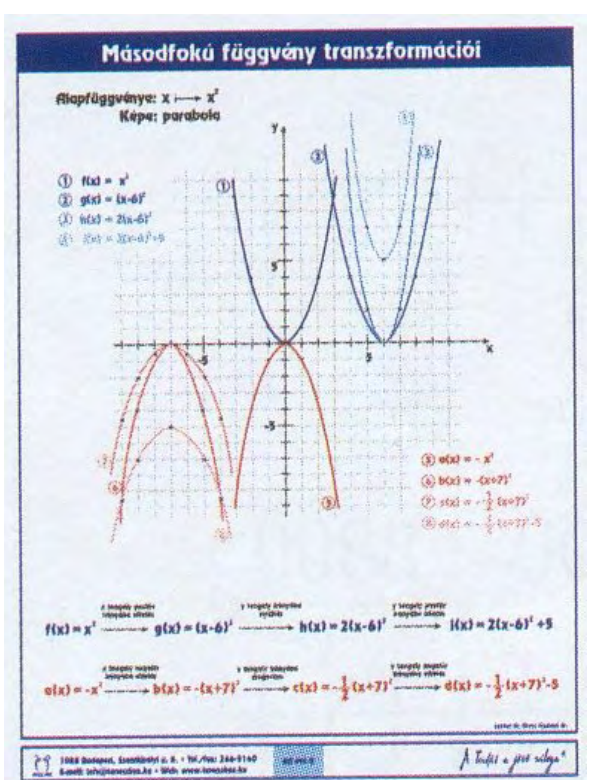
6.1. Oktatást segítő környezet

A diákok általános iskolás éveikben több mint 7200 órát töltenek a tanteremben, illetve annak közvetlen környezetében. A szám nagyságrendjéből kifolyólag nem hagyhatjuk figyelmen kívül a tanterem és környezete, mint közeg tanulókra gyakorolt hatását. Hiba lenne kihagyni a tanítás, ezen belül is a matematika oktatásának nyújtott lehetőségeit. A gyermek délelőtti a tanteremben tölti, nézelődik, gyakran óra közben is szemlélődik, ezért akarva-akaratlanul megmaradnak emlékezetében a falon lévő képek, ábrák. Ezt a lehetőséget használhatjuk ki a matematika számára a falon elhelyezett tablókkal. A hasznos felület korlátossága miatt a fontosabb és szemléletes ábrák elhelyezése ajánlható. A szemléletesség alapkövetelmény, a képek ugyanis vonzzák a tekintetet, tartalmuk gyorsan rögzül, a verbális jellegű poszterek azonban kevésbé keltik fel az érdeklődést, rögzítésük csak tudatos odafigyeléssel és „munkával” érhető el, ezért hatásfokuk jóval kisebb. Alsó tagozatosoknak elsősorban a hosszúság, idő, űrtartalom és tömeg mértékegységeit és váltószámait megjelenítő ábrák ajánlhatók.

<p>TÖMEG</p> <p>$g < \text{dkg} < \text{kg} < \text{t}$</p> <p> $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$ $1 \text{ kg} = 100 \text{ dkg}$ $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ $1 \text{ dkg} = 10 \text{ g}$ </p>	<p>ÚRTARTALOM</p> <p>$\text{cl} < \text{dl} < \text{l} < \text{hl}$</p> <p> $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$ $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$ $1 \text{ l} = 100 \text{ cl}$ $1 \text{ dl} = 10 \text{ cl}$ </p>
<p>IDŐ</p> <p>$\text{mp} < \text{p} < \text{ó} < \text{nap} < \text{hét} < \text{hónap} < \text{év}$</p> <p> $1 \text{ nap} = 24 \text{ óra}$ $1 \text{ óra} = 60 \text{ perc}$ $1 \text{ óra} = 3600 \text{ mp}$ $1 \text{ perc} = 60 \text{ mp}$ </p>	<p>HOSSZÚSÁG</p> <p>$\text{mm} < \text{cm} < \text{dm} < \text{m} < \text{km}$</p> <p> $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$ $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$ </p>

Felső tagozatban elsősorban a függvények, halmazműveletek, derékszögű koordináta rendszer, fontos képletek és alkalmazások és természetesen a geometriai tablók (síkidomok, testek, felszín, terület, háromszög nevezetes vonalai, pontjai, szögek) kihelyezése indokolt.

TESTEK FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA		
FELSZÍN (A)	TEST	TÉRFOGAT (V)
$A = 2T_1 + T_2 =$ $= 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$	Téglatest	$V = T_1 \cdot M = a \cdot b \cdot c$
$A = 2T_1 + T_2 =$ $= 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$	Kocka	$V = T_1 \cdot M = a \cdot a \cdot a = a^3$
$A = 2T_1 + T_2$	Egyenes hasáb	$V = T_1 \cdot M$
$A = 2T_1 + T_2 =$ $= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot M$	Egyenes közhenger	$V = T_1 \cdot M = r^2 \cdot \pi \cdot M$
$A = T_1 + T_2$	Egyenes gúla	$V = \frac{T_1 \cdot M}{3}$
$A = T_1 + T_2 =$ $= r^2 \cdot \pi + r \cdot a \cdot \pi$	Egyenes kúp	$V = \frac{T_1 \cdot M}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$
$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$	Gömb	$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$
T_1 : alaplapi területe		T_2 : palást területe



A terem és maga az iskola padlója is remek, kihasználatlan felület, ide elsősorban menet közben összeolvasható képleteket helyezhetünk (pl.: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$). Használjunk nagy, élénk színű betűket és jeleket, a szalagokat időnként cserélhetjük is. Az iskolai padlók általánosan lakkozott parketta, vagy pvc anyagúak, a folyosót pedig kővel burkolják. A felületekre helyezett ábrákat és képleteket napjainkban már könnyen beszerezhető, könnyen kezelhető, igénybevételekkel szemben jól ellenálló fóliával kell bevonni.

6.2. A matematikatanulás alapelvei

A matematikatanulás alapelvei a dinamika, a konstruktivitás, az érvényesség és a perceptív változatosság elve.

A matematika tanulásához *dinamikus* matematikai környezetet kell kialakítani, ahol a tanulók tárgyakkal, modellekkel, fogalmakkal matematikai tevékenységet végezhetnek, matematikai tulajdonságokat fedezhetnek fel. Ennek a tevékenységnek három fázisát különböztetjük meg. Az első fázisban a tanulók megismerkednek a matematikai környezettel és tapasztalatokat gyűjtenek a konkrét szituációban. A második fázis a strukturálás. Ekkor történik meg annak a matematikai anyagnak a logikai rendezése, amelyet az előző fázisban tapasztaltunk, a közös vonások felfedezése, osztályba sorolás, általánosítás, formalizálás, szimbólumok és matematikai nyelv használata, vizualizáció. Végül a gyakorlás és rögzítés fázisa, aminek feladata kialakítani az új helyzetben alkalmazható matematikai ismeretek és eljárások alkalmazásának képességét és a belső tudást.

A *konstruktivitás* elve, a matematikai fogalmak kialakítása úgy megy végbe, hogy alkalmas matematikai problémaszituációkon keresztül vezetve a tanulókat, képessé tesszük őket a fogalmak lényeges jegyeinek erőteljes megismétlésével a fogalmak önálló felépítésére és tartalmi jegyeinek a megállapítására.

Az *érvényesség* elve tartalmi jegyek kritikai elemzését, analízisét jelenti. Ide tartozik például a geometriai feladatok megoldásainak diszkussziója, a tétel és megfordítása közti kapcsolat vizsgálata, ellenpéldák, bizonyítások és cáfolatok, állítások egyenértékűségének vizsgálata.

A *perceptív változatosság* azt jelenti, hogy ha több csatornán keresztül történik a kialakítandó fogalmak és tulajdonságok észlelése, akkor jobban felerősíthetők a lényeges, meghatározó tulajdonságok. Erre azért van szükség, mert minden ember még ugyanabban a környezetben is másképpen reagál az őt érő hatásokra. Többcsatornás ismeretközvetítés lehet eszközökkel, tárgyakkal való manipuláció, modellezés, vizualizáció, matematikai szimbólumok és a matematika nyelvének a használata.

6.3. A szemléltetés szerepe a matematikában

A matematika az oktatás azon tantárgya, ahol a legszükségesebb de egyben a legnehezebb a szemléltetés. A legtöbb problémát talán az okozza, hogy a gyerekek nem is értik meg igazán miért fontos matematikát tanulni. Ellentétben például a környezetismerettel vagy az informatikával nem tudják mi hasznuk lesz ebből az életben. Ezért meg kell nekik mutatni, hogy a legtöbb dolog alapja a matematika, valamilyen formában mindig felbukkan és végigkíséri életünket. A valóságot szemléltető valóságközeli feladatok kitűzésével enyhíthetünk a problémán. Hitelesebb, ha nem elmondjuk a példát, hanem a valódi szemelvényeket, vagy ezek fénymásolatát, esetleg internetről letöltött anyagot osztunk ki. Így a tanuló maga is láthatja, nem kitalált, hanem a hétköznapi életből vett feladatokkal, problémákkal foglalkozunk. Azonban, ha a feladatlapokon szerepel az azt kiadó cég neve, akkor engedélyt kell kérnünk tőlük a kiadvány oktatási célra való felhasználására! Jól használhatók hitelajánlatok, pontgyűjtő rendszerek leírásai, logikailag hibás ajánlatok, árajánlatok, tarifacsomagok, a lényeg,

hogy adatokat, választási lehetőségeket tartalmazzon és a mindennapi életből származzon.

A szemléltetés másik fontos szerepe a matematika elfogadtatása, sőt megkedveltetése, népszerűvé tétele. A legtöbb matematikával kapcsolatos probléma gyökere a tantárgy utálata. A tananyag száraz, unalmas, túlságosan elméleti, a gyerekek nem szeretnek foglalkozni vele. Ennek eredményeként felületesség és távolságtartás, majd lemaradás alakul ki, végül a kettő együtt a „minek tanuljam, úgysem értem” esethez vezet. Feladatunk, a matematika másik, szebb, érdekesebb és izgalmasabb oldalának bemutatása, az előadások változatossá formálása, s e cél érdekében tett lépések között elsődleges a szemléltetés, ezen belül is inkább a tevékenységformák változtatása, mint az eszközök áradata. Azonban ügyelni kell a szemléltetés változatosságára is. Hiába a rengeteg szemléltetés, ha az csak egy bizonyos beidegződött képet mutat. Előfordul például, hogy a gyerekek a derékszögű háromszöget sokszor és sok összefüggésben, de csak „alaphelyzetben” látják. Ilyenkor gyakori, hogy egy átfogójára állított derékszögű háromszöget nem sorolnak a többi közé. Nem ismerik fel, mert számukra az ilyen háromszögek a befogójukon állnak. A kialakult sztereotípiáknak nem szabad teret engedni, a demonstrációnak éppen az ellenkezőjét, a nyitást kell elérnie.

A tanulók élményként élik át, ha sikerül egy - a valóságból átemelt problémát - megoldaniuk. És mi a matematika, ha nem a problémák megoldását lehetővé tevő logikus gondolkodás? A bemagolt képlet, definíció, megoldási séma nem más, mint megtanult vers, alkalmazható tudás nélkül. A gyerek vissza tudja idézni a szavakat és ezért úgy tűnhet, megértette a tananyagot, azonban gyakorlati helyzetek megoldásakor fény derül a felszínes tudásra. Ha valaki megtanult gondolkodni, könnyedén be tudja pótolni a lemaradt tananyagot, de ha nem képes a logikus gondolkodásra, akkor hiába a megtanult képletek sokasága, képtelen lesz ezek használatára egy később felmerülő komplexebb feladat esetében. Ezért a hangsúlyt inkább a minőség javítására kellene helyezni a mennyiséggel szemben. A

szemléletesség a felszín mögötti tartalom megértésének képességét is fejleszti s gondolkodásra buzdít azáltal, hogy új, jobban „emészthető” képet közvetít. A problémamegoldás egyik hatásos eszköze a vizuális leképezés. Képzetek alakításával, vizuális reprezentációk segítségével lehet bonyolult, elvont problémák megoldásához legközelebb eljutni. A legképzettebb emberek is gyakran ábrákat, folyamatábrákat, rajzokat készítenek munkahelyükön, otthonukban, környezetükben felmerülő nehéz feladatok megoldásához.

De a verbális információ, az élőszó is lehet szemléletes. Beszédünk lehet száraz, unalmas, vagy színes, fantáziadús. Utóbbi jobb közeget biztosít az oktatás folyamatához, kreatív, képies gondolkodásra tanít, érdeklődést vált ki.

6.4. Gyakorlati lehetőségek

6.4.1. Papírhajtogatás

Egy izgalmas feladat, kreatív foglalkozás geometriai tételeket papírból meghajtogatni. Alapelvei az euklideszi szerkesztés elemeivel megfeleltethetőek, így kitűnő előkészítése a „hagyományos” szerkesztésnek és a geometriai tételeknek. A gyerekek észrevétlenül tanulnak meg fontos összefüggéseket, kialakul bennük egy szemléletes kép, amihez gondolatban később is visszanyúlhatnak. Az eljárás mindössze néhány ív áttetsző (két elem egymásra illeszthetőségéért) papírt igényel, gyors, látványos és nagy előnye, hogy mindenki egyénileg készítheti.

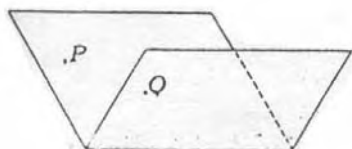
A hajtogatás alapelvei:

- 1.) Tudunk egyenest hajtogatni.
- 2.) Rá tudjuk illeszteni a hajtási élt egy vagy két pontra.
- 3.) Össze tudjuk hajtani a lapot úgy, hogy két pontja egybeessen.
- 4.) Össze tudjuk hajtani a lapot úgy, hogy két egyenes fedésbe kerüljön.

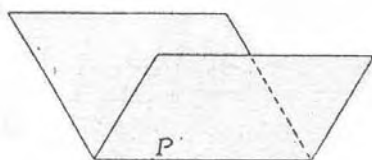
- 5.) Szakaszok és szögek nagysága megegyezik, ha a papír összehajtásával egymással fedésbe hozhatók.

Először foglalkozunk az alapszerkesztésekkel. A gyerekek maguk jöjjenek rá a lehetőségekre, a tanító csak irányítsa őket, használjon kérdve kifejtő módszert és felfedeztető tanítást. Például tegyük fel a kérdést: tudunk-e egyenesre merőlegest állítani? Hagyjunk időt a próbálkozásra. Ilyen formában végezzük el az alapszerkesztéseket.

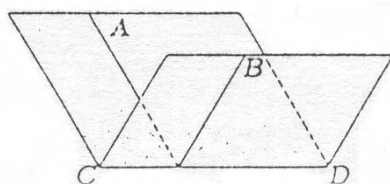
- 1.) Egyenes szerkesztése. A papírt egyszerűen meghajlítjuk és az élt kézzel végighúzzuk.



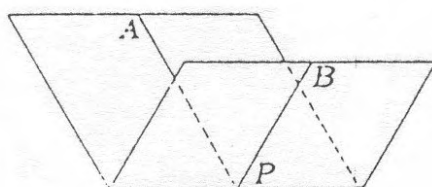
- 2.) Adott P ponton átmenő egyenes szerkesztése. Mint előbb, csak az élt a P pontra hajlítjuk.



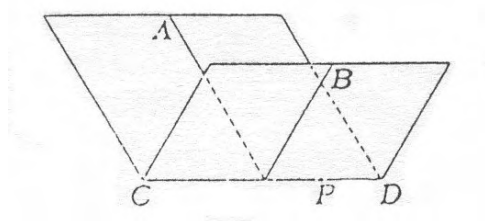
- 3.) Adott egyenesre merőleges szerkesztése. Az adott egyenest önmagával hozzuk fedésbe.



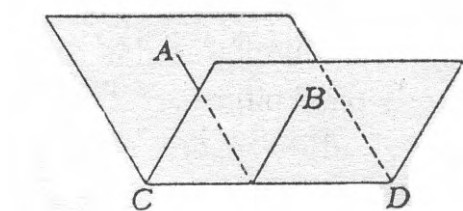
- 4.) Adott egyenesre adott P pontban merőleges szerkesztése. Megint önmagával hozzuk fedésbe az adott egyenest és a hajlítási élt a P-re illesztjük.



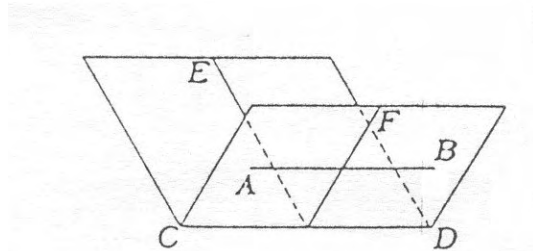
- 5.) Adott egyenesre adott P pontból merőleges szerkesztése. Az eljárás a négyes ponttal megegyezően végezzük.



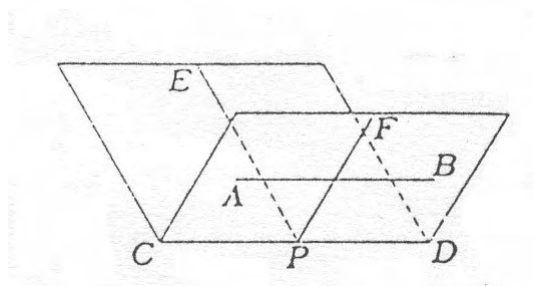
- 6.) Adott AB szakasz felezőmerőlegesének megszerkesztése. Az A és B pontokat hajtjuk fedésbe.



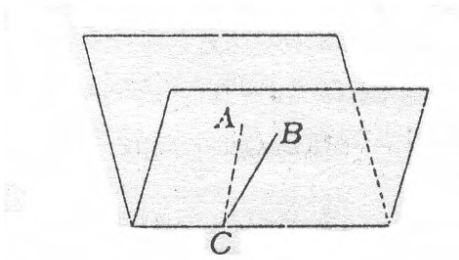
- 7.) Adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése. A párhuzamost úgy kapjuk meg, hogy kétszer hajtunk merőlegest.



- 8.) Adott P ponton át adott egyenessel párhuzamos szerkesztése. Az előző szerkesztéshez hasonlóan, az élt a P pontra illesztjük.

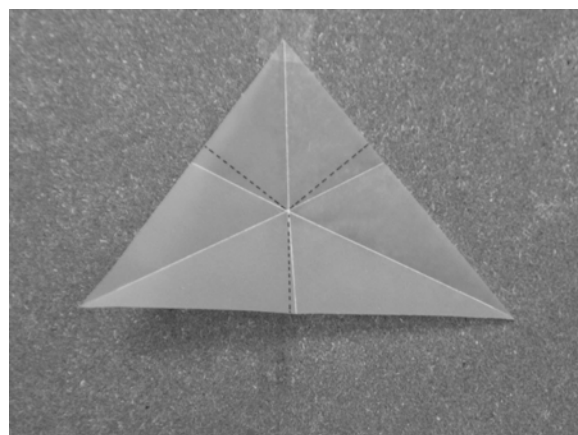
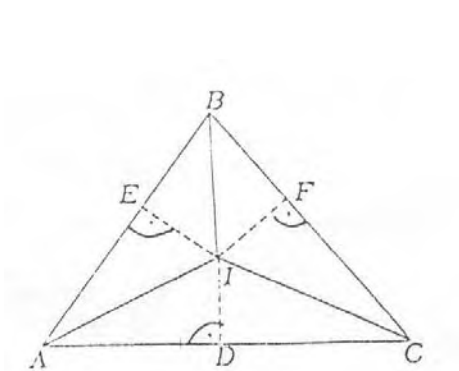


- 9.) Adott szög szögfelezőjének szerkesztése. Hajtáskor a szög szárait hozzuk fedésbe.

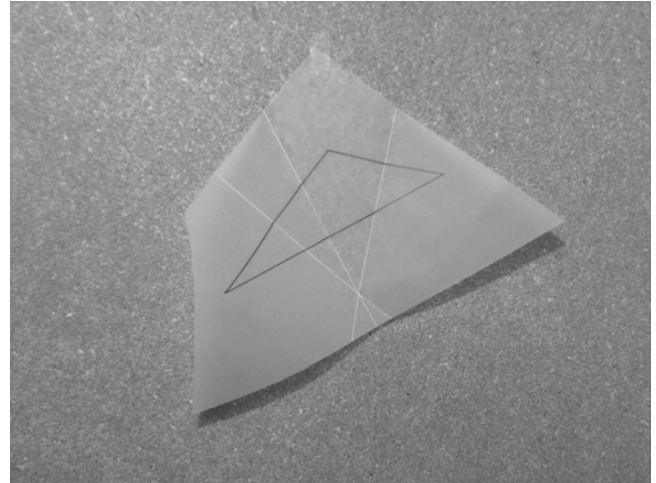
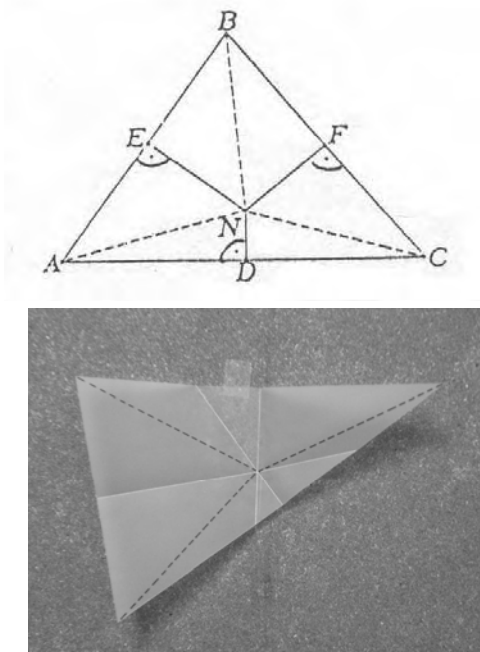


Ha ezek sikerültek, belefoghatunk nehezebb szerkesztésekbe, például szemléletesen bizonyíthatunk háromszög nevezetes vonalaira és pontjaira vonatkozó tételeket:

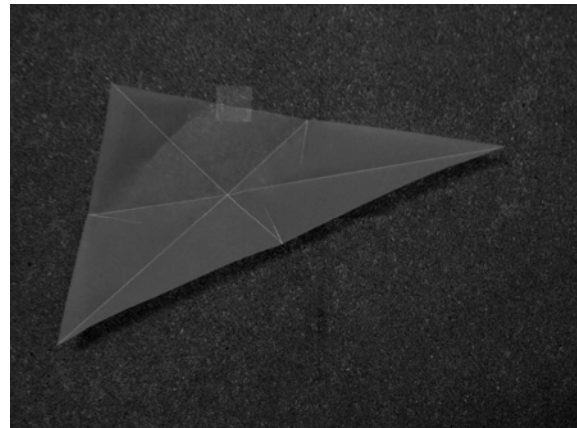
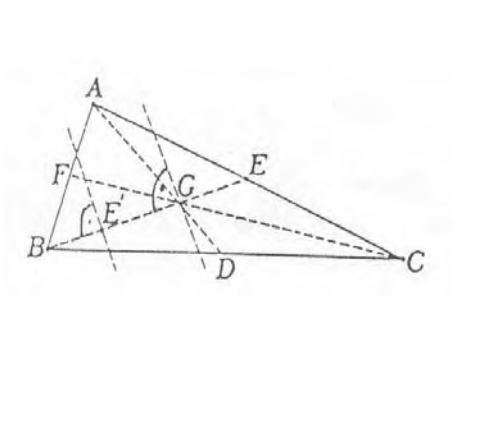
- 1.) Bármely háromszög szögfelezői egymást egy pontban metszik, és ez a pont egyenlő távol van a háromszög mindhárom oldalától. Hajtogassuk meg a háromszög belső szögfelezőit, majd a közös I metszéspontjukból állítsunk mindhárom oldalra merőlegest. Ezután például az IC szögfelező mentén hajtsuk egymásra a DC és az FC szögszárakat. Megkapjuk, hogy D képe F, illetve $ID=IF$. Hasonlóan folytassuk tovább az eljárást a többi szögfelezőre vonatkozólag. Nyilvánvaló, hogy $ID=IF=IE$, és ebből következik, hogy az I pont egyenlő távol van a háromszög mindhárom oldalától.



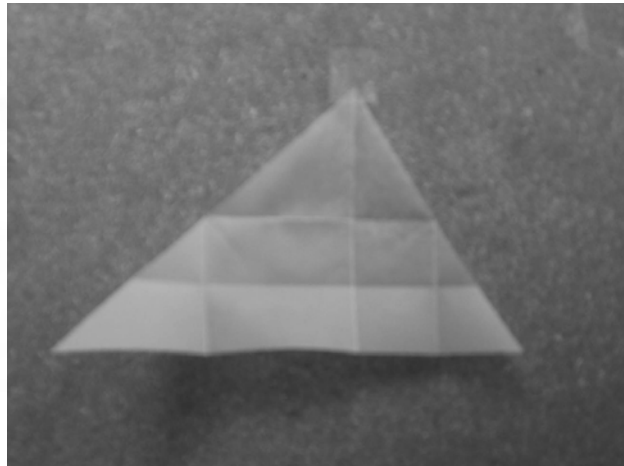
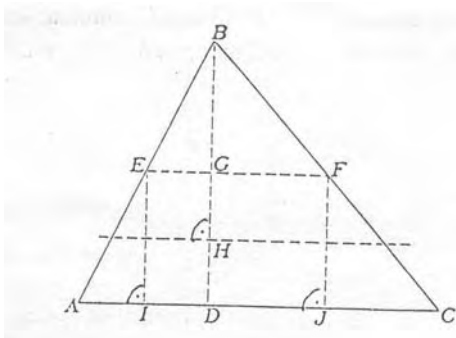
- 2.) Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egymást egy pontban metszik, és ez a pont egyenlő távol van a háromszög mindhárom csúcsától. Az előzőekhez hasonlóan járunk el, csak most az egyes oldalak oldalfelező merőlegeseit hajtogatjuk meg és az N metszéspontnak a csúcsoktól való távolságait hasonlítjuk össze.



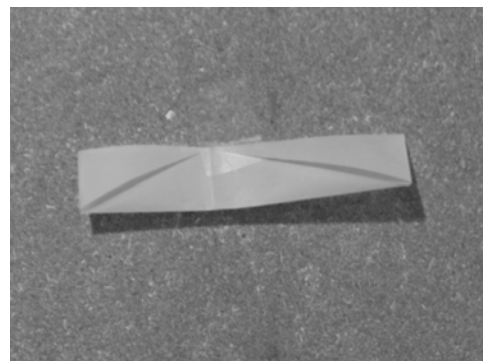
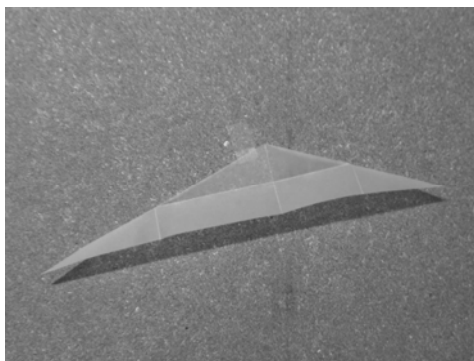
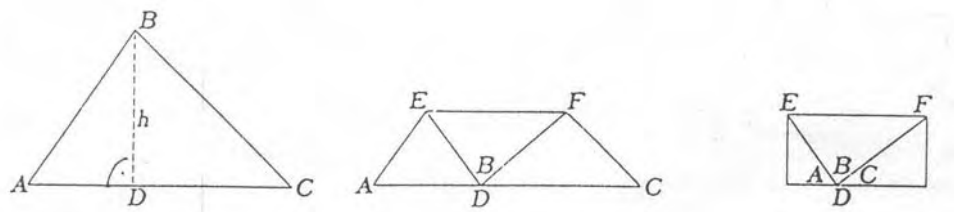
- 3.) Bármely háromszög súlyvonalai egy ponton mennek keresztül és egymást 2:1 arányban osztják. Meghajtogatjuk az ABC háromszög súlyvonalait, megkeressük G metszéspontjukat. G -ben BE -re merőlegest állítunk, majd erre áttükrözzük az E pontot, A tükörkép legyen E' . E' -ben is állítunk merőlegest BE -re, majd B -t tükrözzük át erre a merőlegesre. Ekkor B képe G -be kerül. Eljárásunkat ismételjük meg a másik két súlyvonalra is.



- 4.) Háromszög középvonala. Megkeressük az ABC háromszög AB, illetve BC oldalának az E, F felezőpontjait. Megszerkesztjük a BD magasságot. Összehasonlítjuk a BG és GD szakaszok hosszúságát az EF mentén való összehajtással. Megfelezzük a GD távolságot és a H felezőponton keresztül BD-re merőlegest állítunk, és erre a merőlegesre tükrözzük EF-et. E-ből, illetve F-ből AC-re merőlegest állítunk (EI, FJ). Megkeressük A, illetve C tükörképét az EI-re, illetve FJ-re vonatkozólag.

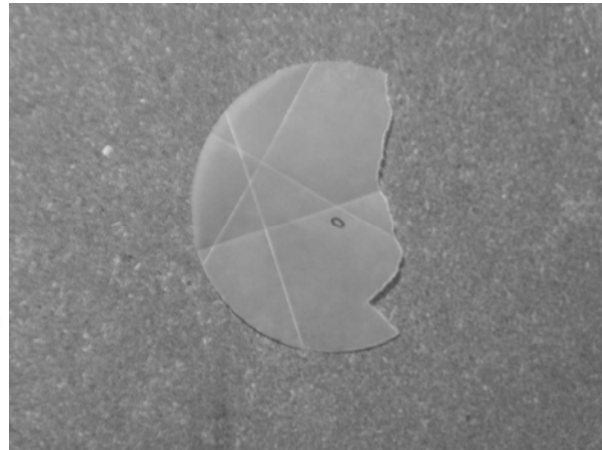
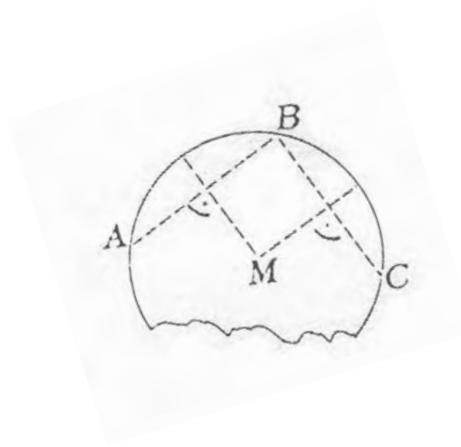


- 5.) Megmutathatjuk, hogy bármely háromszög belső szögeinek összege 180 fok. Hajtogassuk meg ABC háromszög BD magasságát. A B csúcsot hajtsuk rá az AC oldal D pontjára. Az A és C csúcsokat is hajtsuk be a D pontba.

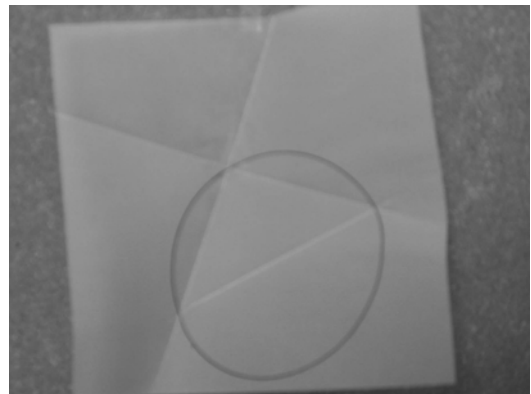
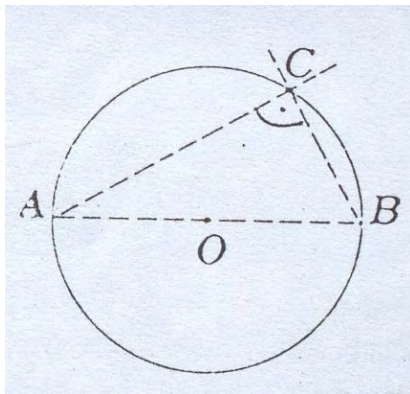


Két érdekes, körhöz tartozó feladat:

- 1.) A kör középpontjának megkeresése, ha a körlapnak csak egy része adott.
Hajtsunk meg két húrt, majd ezek felezőmerőlegeseit. A felezőmerőlegesek metszéspontja a kör középpontja.



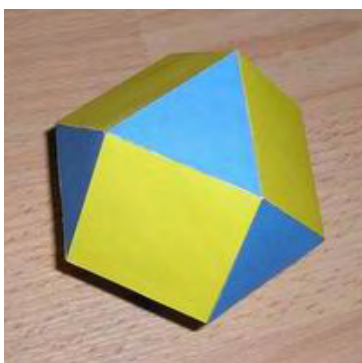
- 2.) Thalesz tétele. Hajtsuk meg az AB átmérőt, az AC és CB szelőket.
Keressük meg CB-nek az AC egyenesre vonatkozó tükörképét.



Ezekén kívül még sok körhöz, sokszöghöz és szimmetriához tartozó feladatot szemléltethetünk hajtogatással. Ha a gyerekek már ismerik az alapszerkesztéseket, akkor könnyen meghajtogatják a feladatokat még akkor is, ha csak alkalmanként foglalkozunk vele.

6.4.2. Testek

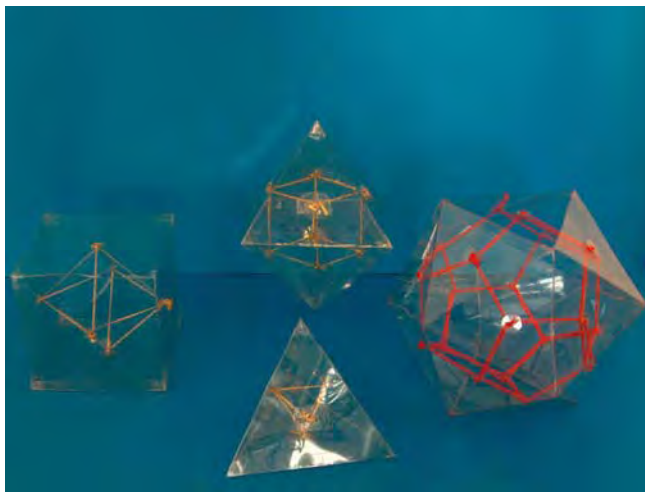
A testek a matematika talán legszebb, leglátványosabb területe. Itt valóban könnyen és gyorsan összefüggéseket találhatunk mindennapi életünkkel. Kezdve az építészettel a mechanikán keresztül egészen a művészetekig mindig és mindenhol testek, formák vesznek körül minket, és elmondható, hogy minden geometriai tárgy egyben esztétikumot is hordoz. A középfokú matematika egyetlen területe, ami kiemelkedik a könyvekből, füzetekből, és a tananyag nagy részétől eltérően inkább gyakorlati, mint elméleti tulajdonságú. A testeket meg lehet fogni, lehet forgatni, szétszedni, egymáshoz illeszteni stb. Ráadásul számuk végtelen, ami külön érdekesség a gyerekek számára. Ennek megfelelően a szemléltetőeszközök piacán is nagy népszerűségnek örvend, szinte számtalan formában kapható. Készíthetünk mi is és a tanulók is testeket, elsősorban poliédereket, akár papírból, akár (hurka)pálcikákból, szívószálakból. A papírból, kartonból készült poliéderek a felületi tulajdonságok szemléltetéséhez használhatók, úgymint a poliédert alkotó sokszögek, a felszín és a háló vizsgálatára.



Az ilyen jellegű poliéderek elkészítéséhez sok segítséget nyújtanak az interneten található geometriai honlapok, ahonnan ötletek gyűjthetők, illetve néhány oldalon kinyomtathatjuk a kiválasztott poliéderek hálóját (ezek a rajzok az illesztőfüleket is tartalmazzák), kivághatjuk és könnyedén összeállíthatjuk, illetve a gyerekek is elkészíthetik a testeket. Ilyen poliéderhez kapcsolható feladatok:

- 1.) Az internetről letöltünk különféle poliéderek hálóját, majd ezeket sokszorosítjuk.
- 2.) Minden gyereknek adunk belőle kettő ugyanolyat, és megkérjük őket, hogy otthon mindkettőt vágják ki és az egyiket ragasszák is össze.
- 3.) A következő órán feladatokat végzünk velük, egy-egy vizsgálat után a testeket továbbadják, így mindenki megfigyelheti az összes típusú poliédert.
- 4.) Figyeljük meg az összeragasztott poliéderek felépítését. Hány sokszögből állnak? Milyen sokszögekből?
- 5.) Rajzoljuk le a hálójukat, majd ellenőrizzük rajzunkat a poliéderhez tartozó kivágott hálókkal!
- 6.) Mekkora a test felszíne (méréssel vagy számolással)?
- 7.) Hány testátlója van? Konvex, vagy konkáv?
- 8.) Hány éle, csúcsa, lapja van? Írjuk ezeket táblázatba! Van-e a lapok, élek és csúcsok között valamilyen összefüggés?

Készülhetnek testek pálcikákból, szívószálból, drótból is, ezeknél kevésbé látványosak a lapok, de annál jobban vizsgálhatók az élek, csúcsok és testátlók. A poliéderen át lehet látni, látszanak a szemközti csúcsok és élek is. Ezekkel lehet szemléltetni a poliéderek beírt poliédereit, testeit is.



Ezen testek, poliéderek és kaledociklusok bemutatásának elsődleges célja a térszemlélet fejlesztése.

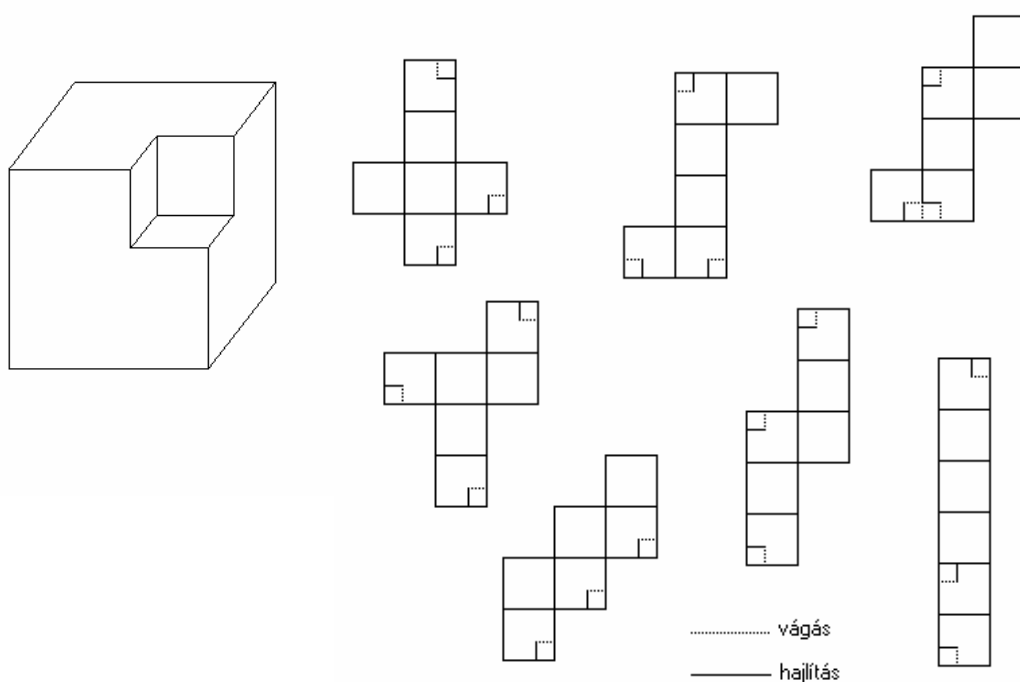
A testekhez kapcsolódó témakörök:

- 1.) Testek csoportosítása
- 2.) Felszín, háló
- 3.) Térfogat
- 4.) Lapok, élek, csúcsok közti összefüggések, testátlók (poliéderek)
- 5.) Térszemlélet fejlesztése

A kereskedelemben sokféle test kapható, nagy, tanári szemléltető és kisebb, gyerekek által használható kivitelben is. Készülnek műanyagból, fémből, általában több funkciósak, a műanyagokba például szemcsés anyag vagy folyadék tölthető a térfogat szemléltetésére, a fémvázakat pedig mágneses lapok burkolják, melyek a vázról leszedve és mágneses táblára helyezve felszínt és hálót szemléltetnek.



Ezek az eszközök nagyon szépek és hasznosak, de magas áruknál fogva megmaradnak a tanári bemutatás szintjén. Jó megoldás, ha a tanulók készítik el maguknak a szemléltető eszközöket, például papírból. Készítés közben látják a hálót, megismerik a testeket. Elkészíttethetünk kockát, téglatestet, gúlákat, kúpokat, hasábokat, poliédereket és ezek hálóját beragaszthatják a füzetükbe. Térszemléletet fejlesztő logikai feladat, amikor adunk egy izgalmasabb formájú poliédert és néhány (például hét) darab hálót, amelyekből csak egy tartozik az adott testhez, a tanulóknak pedig ki kell választaniuk a helyes(ek)et.



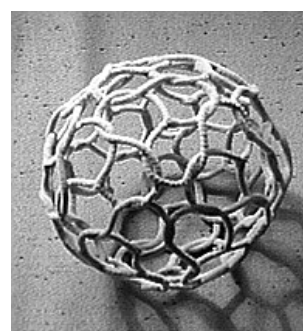
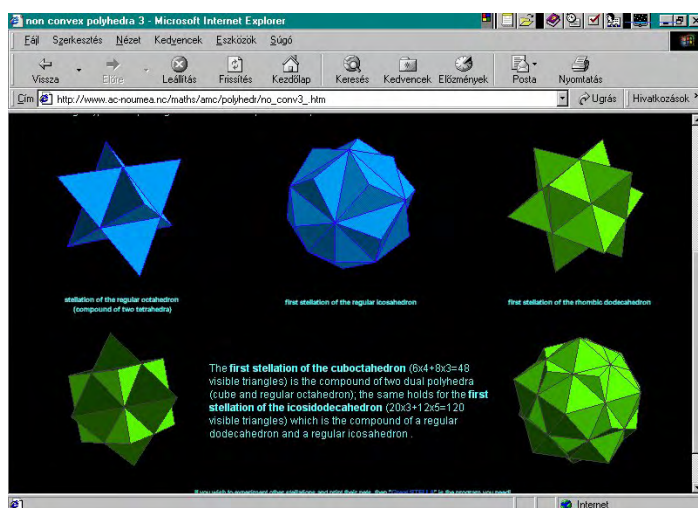
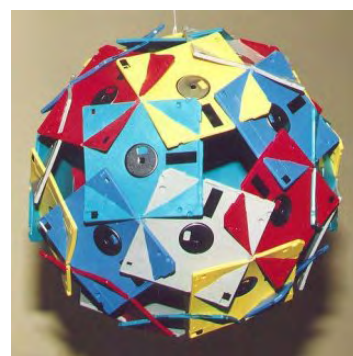
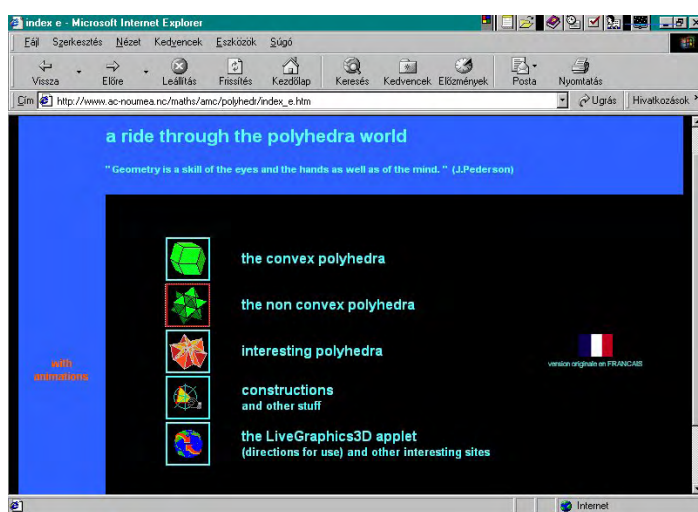
A gyerekek akár ki is vágathatják és megpróbálhatják összeállítani őket.

A poliéderek világának megismertetéséhez használható, mint izgalmas téma mutatható be néhány színvonalas internetes honlap.

www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr/index_e.htm

Szavakba nem foglalható, varázslatos oldal, tele különleges animációkkal, érdekességekkel. Az összes poliéder ábra forgatható,

háromdimenziós, bármely nézőpontból megfigyelhető, megtalálható színes oldallapokkal és csupán éllel rajzolva is (a takarásban lévő éleket szaggatott vonallal rajzolják). Érdekességeket is találhatunk, például a kocka és más poliéderek összes létező hálóját, vagy a rendkívül kedvező tulajdonságú - emiatt az emberi technikai megoldásokban szélesebben terjedő - méhsejt szerkezet forgatható háromdimenziós ábráját, hálóját, felépítéssel és adatokkal együtt. Poliéderekre a művészet kapcsán is bukkanhatunk az oldalon, kezdve Leonardo da Vinci alkotásaival, egészen a CD- és floppylemezéből készült, vagy kötélből hurkolt darabokig.



www.mathconsult.ch/showroom/unipoly

www.georgehart.com

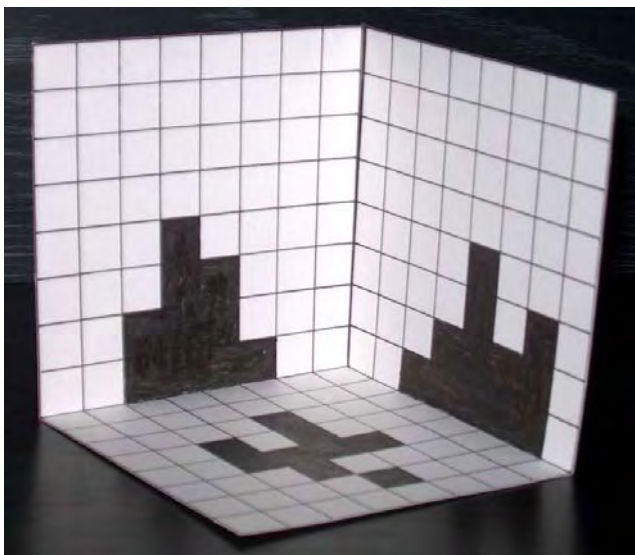
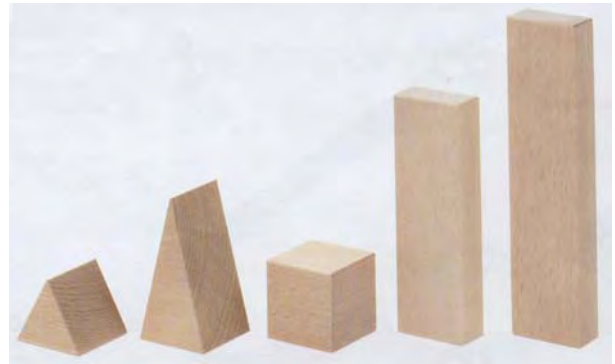
Hasonlóan hasznos, ámbár kevésbé látványos és szemléletes lapok. Itt inkább adatokat és információkat gyűjthetünk, illetve elkészített karton poliédereket és a témával foglalkozó szakkönyveket vásárolhatunk.

www.korthalsaltes.com

Az oldal alcíme: Paper Models of Polyedra. Innen tölthetünk le poliéderek elkészítéséhez hálókát, amiket már csak ki kell vágni és össze kell ragasztani. Nagyon sokféle közül válogathatunk az egészen egyszerűektől kezdve a bonyolult konkáv típusokig. Minden háló mellett megtalálható az összeállított poliéder fényképe!

Az első honlapra érdemes rászánni egy órát, elvinni a gyerekeket egy gépterembe és hagyni őket játszani és nézelődni, egészen biztosan le fogja kötni őket a sok látnivaló. Ha információra van szükségünk, válasszuk a második és harmadik címet. A negyedik oldal poliéderek készítését segíti.

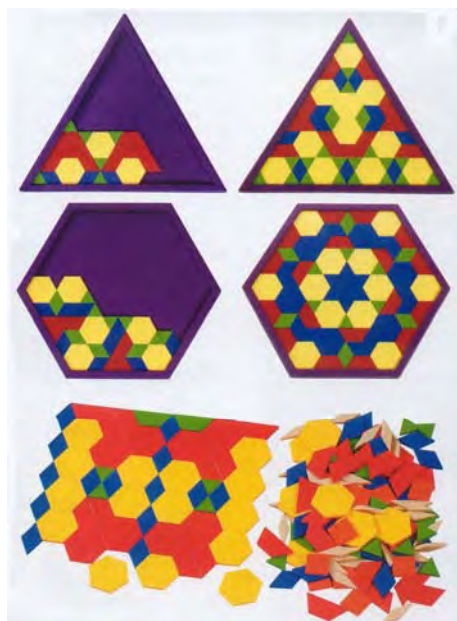
Szintén a térszemlélet fejlesztéséhez használható eszköz az árnyék építőjáték. Emellett összekapcsolja a matematikát a rajzzal, előkészíti azt az ismeretet, azt a látáskészséget, amelyre a későbbiekben a műszaki iskolák a műszaki rajzot alapozhatják. A feladat lényege, hogy a három kétdimenziós vetületi kép alapján fel kell tudni építeni a háromdimenziós alakzatot. Ennek egy egyszerű, olcsó változata, amikor mi rajzoljuk meg a vetületi képeket, az alakzatokat pedig kockacukrokból állítjuk össze. Kockacukrot minden gyerek tud hozni, akár nagy mennyiségben is. Természetesen kapható igényesebb, de lényegesen drágább változat is.



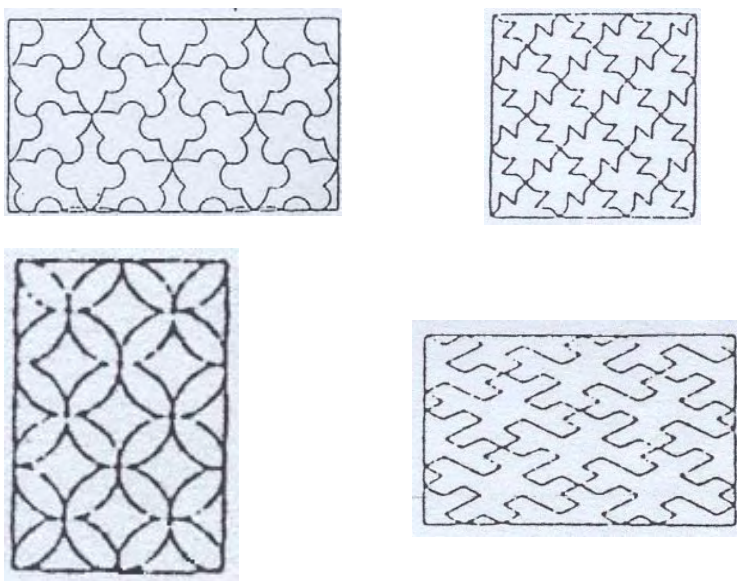
6.4.3. Sokszögek, síkidomok

A poliéderek mellett a másik népszerű, jól szemléltethető témakör a sokszögek, síkidomok világa.

A sokszögek bevezetésekor használható szemléletes feladat a parkettázás. Megkülönböztethetjük az egyfajta és a sokféle síkidomos változatát. Az utóbbi esetben a feladat meghatározott típusú, változatos nagyságú síkidomokat úgy egymás mellé helyezni, hogy azok résmentesen lefedjék a sík egy részét. Csak ezzel a megkötéssel akkor dolgozzunk, ha célunk, hogy a gyerekek ismerkedjenek ezekkel a formákkal, rakosgassák, forgassák őket, ezáltal vegyenek észre bizonyos összefüggéseket (például 6 szabályos háromszögből egy szabályos hatszög rakható össze, vagy egy négyzet és a köré rakott négy darab egyenlőszárú derékszögű háromszög egy újabb, nagyobb négyzetet ad, melynek oldalfelező pontjai esnek egybe az eredeti négyzet csúcspontjaival). Bonyolultabb a feladat, ha a sík egy meghatározott részét (szabályos háromszög, négyzet, szabályos hatszög, stb.) kell lefedniük. Ilyenkor előre kell gondolkozni, esetleg képzeletben kell folytatni a kirakást vagy problémamegoldó stratégiát kell kidolgozni. Tovább nehezíthetjük a példát, ha a parkettázás szimmetrikusságát is kikötjük. Legyen például szabályos hatszöget lefedő, középpontosan szimmetrikus a parkettázás.



Nehéz feladat elé állítjuk a gyerekeket, ha megkérjük őket, hogy képzelőerejüket használva most egybevágó síkidomokkal fedjék le a síkot. Kezdeként gondoljanak az egyszerűbb formákra, mint a háromszög, vagy a szabályos hatszög. Gondolják végig, hogy milyen térburkoló lapokkal találkoztak eddig. Ezek az egyre jobban terjedő kövek tökéletes megoldások, hiszen egybevágóak és bármekkora felület lefedhető velük. Gyűjtsük össze az ötleteket, a megoldásokat, majd mutassunk a tanulóknak néhány érdekes, bonyolult fedést.

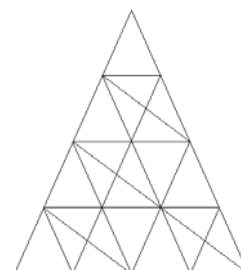
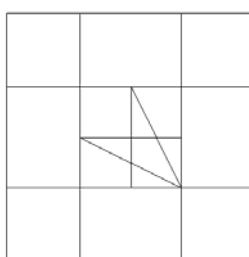
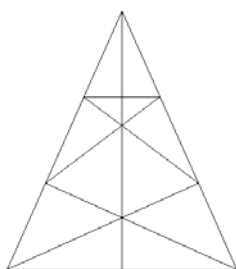


Kapható színes, áttetsző, műanyag sokszögekből álló készlet, melynek előnye, hogy az 1-2 centis lapocskákat írásvetítőre helyezve megkapjuk nagy, jól látható és színes képét a falon / táblán / vásznon. Nem kell táblára rajzolgatni, sem ragasztgatni a papír sokszögeket, egyszerűen csak kivetíteni. Az írásvetítőre helyezhetünk például egy halmazokat tartalmazó fóliát és erre - a megfelelő helyre - rakosgatjuk a sokszögeket, majd megnevezzük a halmazok közös tulajdonságait (például nem szimmetrikusak, tengelyesen szimmetrikusak, stb.). Egy-egy asztalra is helyezzünk készletet, így a gyerekek maguk is próbálkozhatnak, kísérletezhetnek. A formák egymással összefüggő méreteken készülnek, összeillesztésükkel nagyobb, bonyolultabb sokszögek készíthetők. Az összeillesztős feladatok lényege, hogy meghatározott számú és típusú sokszögekből meghatározott tulajdonságú alakzatokat kell alkotni. Például:

- 1.) maximum 3 sokszögből hány fajta trapézt tudsz kirakni?
- 2.) két egyenlőszárú, tompaszögű háromszögből hány sokszöget lehet összeállítani?
- 3.) készíts 4 elemből tengelyesen tükrös sokszögeket!
- 4.) összesen hány konkáv sokszög alkotható a háromszögekből?



Sokszögek kereséséhez készített feladatok a gyerekek számára - az ábrák és a feladatok egyszerűsége ellenére - kihívást jelentenek, ezért egyben érdekesek is. Fejleszti szemléletüket, a különböző helyzetű, legtöbbször sokszorosán tartalmazott és tartalmazó sokszögek felismerését és a helyes megoldáshoz valamilyen összeszámolási logikát, stratégiát is alkalmazni kell. Kiváló, a megszokottól eltérő és annál izgalmasabb házi feladat. Magunk is alkothatunk, de különböző forrásokból (például TV műsorok, rejtvény magazinok, IQ tesztek, internet) is gyűjthetünk ilyen feladatokat. Három példa a témakörhöz: hány háromszög / négyszög / háromszög látható az ábrán?



6.4.4. Matematika és művészetek

Ezt a két, egymástól látszólag távol álló területet kapcsolhatjuk össze a szemléltetés segítségével. A gyerekek számára is láthatóvá válik, hogy a matematika életünk része, még az egyszerűen csak gyönyörködtető céllal létrehozott alkotások mögött is megtalálhatjuk a számok világát. Felhasználhatók absztrakt képek, festmények, kastélyok fotói, alaprajzai, díszkertek felülnézetei, testekből, főként poliéderekből összeállított szobrok. Ezek bemutatása, beépítése a tananyagba nem csak matematikai, hanem esztétikai célt is szolgál. Ha csak egy tanulóban is felkeltettük az érdeklődést például a festészet, vagy egy kastély iránt, akkor már jobban jártunk, mintha fantáziátlan sokszög ábrákat mutogattunk volna nekik. Az ilyen típusú szemléltetésre kiemelten igaz, hogy érdeklődést kelt és motiváló hatású.

Vasarely sokszögekből összeállított képei remekül felhasználhatók az általános iskolai geometria tanításához. Például 1966-os Sikra című műve 5 síkidomból, egyenlőszárú derékszögű és szabályos háromszögekből, körökből, négyzetekből és rombuszokból épül fel.



A mű alapján tárgyalható a sokszögek témaköre:

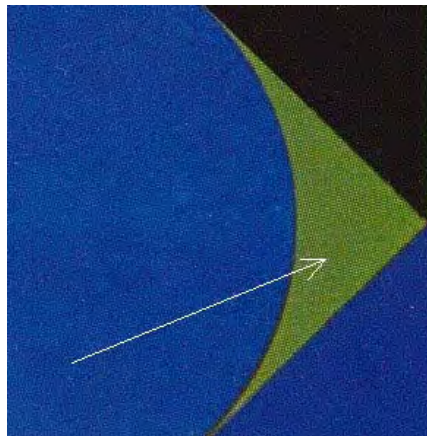
- 1.) Milyen sokszögeket látsz a képen?
- 2.) Hogyan tudnád őket csoportosítani? Például szimmetria (tengelyes, középpontos), szögek alapján? Egészítsd ki a csoportosítást általad ismert, de a képen nem szereplő síkidomokkal!

A tükrözések, forgatások témaköre:

- 1.) Szimmetrikus a kép?
- 2.) És a négy belső alakzat?
- 3.) És ha nem vesszük figyelembe a színezést?

A terület, kerület témaköre:

- 1.) mekkora a kép területe, ha a nagy négyzet területe 1 egység?
- 2.) mekkora a következő részek területe?



6.4.5. Valóságközeli feladatok, a valóság szemléltetése

A tankönyvek valóságközeli feladatai nagyrészt kimerülnek abban, hogy nem téglalap, hanem kiskert területét kell kiszámolni, vagy kádat töltögetnek 3 csapon keresztül, esetleg felment az alma ára. Természetesen szükség van a feladatok olyan megfogalmazására, hogy azt a tanulók tudják valamihez kötni, el tudják képzelni a helyzetet. Ez sokszor segít, de az életben kevés ilyen problémával fognak megküszdeni. A tananyagba be kell építeni néhány hiteles, valóban gyakorlatias matematikai problémát, olyanokat, melyekkel tényleg találkozhatnak. A gyerekek hamar megkedvelik ezeket a feladatokat és hamarosan maguk is képesek lesznek hasonló problémák gyűjtésére. Mivel a mobiltelefonok elterjedtek az általános iskolások körében is, és a fiatalokat érdekli is a téma, sikeres telefon percdíjakkal és tarifacsomagokkal kapcsolatos feladatokat megoldani. Kiosztunk internetről letöltött, vagy a kereskedőktől hozott tájékoztató prospektusokat, majd meghatározzuk a feladatokat: telefonálási szokásokhoz keressük a lehető legolcsóbb megoldást, a legjobb tarifacsomagot. Ha minden gyereknek van telefonja, akkor kérjük meg őket, házi feladatként írják le saját telefonálási szokásukat és válasszanak hozzá optimális csomagot.



	HORIZONT BÓNUSZ	HORIZONT PLUSZ	HORIZONT EXTRA
HAVI DÍJ	1790 Ft	2390 Ft	2990 Ft
LEBESZÉLHETŐ	Ennek 50%-a	Ennek 50%-a	Ennek 50%-a
17.00 óra után	24 Ft-ért beszélhet!	SMS már 25 Ft-tól!	Csúcsidőben a legjobb, 39 Ft-os percdíj!*

	Horizont Bónusz-tarifacsomag	Horizont Plusz-tarifacsomag	Horizont Extra-tarifacsomag
Havi díj	1790 Ft	2390 Ft	2990 Ft
A havi díjból lebeszélhető	895 Ft	1195 Ft	1495 Ft
Percdíjak hálózaton belül			
csúcsidőben	39 Ft	49 Ft	39 Ft
csúcsidőn kívül	24 Ft	24 Ft	24 Ft
Percdíjak beföldi vezetékes vagy más mobilhálózatba			
csúcsidőben	89 Ft	69 Ft	49 Ft
csúcsidőn kívül	49 Ft	39 Ft	29 Ft
SMS küldése			
hálózaton belül	25 Ft	25 Ft	25 Ft
a Matáv és a Westel hálózatába	32,50 Ft	32,50 Ft	32,50 Ft
a Vodafone hálózatába	36,25 Ft	36,25 Ft	36,25 Ft
nemzetközi mobilhálózatba	43,75 Ft	43,75 Ft	43,75 Ft
Csúcsidő	07.00–17.00	07.00–18.00	07.00–19.00
Csúcsidőn kívül			
hétköznap	17.00–07.00	18.00–07.00	19.00–07.00
szombat, vasárnap és munkaszüneti nap	00.00–24.00	00.00–24.00	00.00–24.00

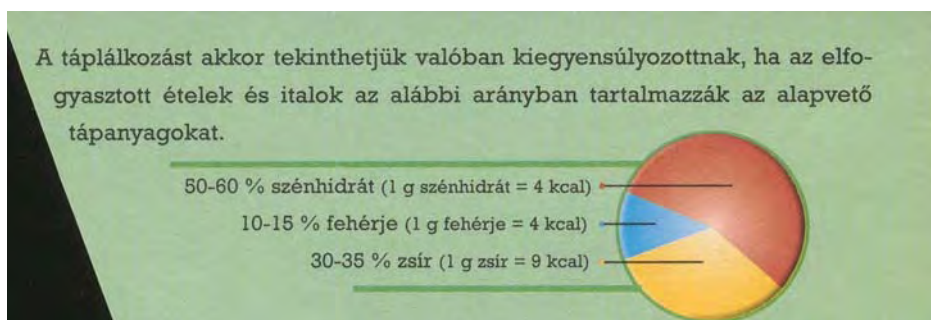
Hangposta hívásának percdíja minden tarifacsomag esetén csúcsidőben 35 Ft, csúcsidőn kívül 12,50 Ft. *A Horizont tarifacsomagok között.

- 1.) melyik csomagot válassza Gábor, aki csak hétköznap, reggel 8-tól délután 5-ig, a munkahelyén használja telefonját, naponta kb. fél órát? Hálózaton belül ugyanannyit beszél, mint más hálózatra.
- 2.) melyiket válassza Ivett, aki tanuló, ezért hétköznap délelőtt ritkán beszél, délután 5-ig és este 8 után kb. 6-6, hétvégén pedig 8 percet, többnyire hálózaton belül? Mennyit költ telefonra havonta, ha naponta 3 sms-t is elküld?

Egy másik példában Kati az alábbi ételeket fogyasztotta napközben:

Kati (16 éves)				
	kcal (1 kcal = 4,184 kJ)	fehérje (g)	zsír (g)	szénh. (g)
 Reggel 10 dkg müzli tejjel 2 dl grapefruitlé	286	15,6	8,4	36,9
Délelőtt	-	-	-	-
 Délben 1 rántott szelet krumplival és savanyúsággal	651	30,8	33,4	56,8
 Délután 1 alma 10 dkg félzsíros sajttal	379	26,4	27,0	7,5

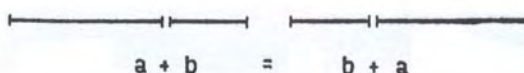
Este ellátogat egy gyorsétterembe a barátaival. Szeretne enni és inni is valamit. Milyen menüt állíthat össze, ha kiegyensúlyozottan akar táplálkozni? (Lásd 3-as számú melléklet)



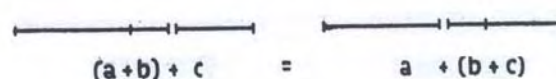
6.4.6. Algebrai egyenletek szemléltetése

Algebrai egyenletek megoldásánál, főként nevezetes azonosságoknál gyakran találkozhatunk hibával. A gyerekek nehezen tanulják meg az összefüggéseket és sokszor hibásan rögzülnek az azonosságok. Kevesebben rontanának, ha köthetnék valami látványos dologhoz, például egy ábrához. Algebrai egyenleteket a geometria segítségével szemléltethetünk, mégpedig úgy, hogy az elsőfokúakat szakaszok hosszával, a másodfokúakat téglalapok területével, a harmadfokúakat pedig téglalap alapú hasábok térfogatával azonosítunk.

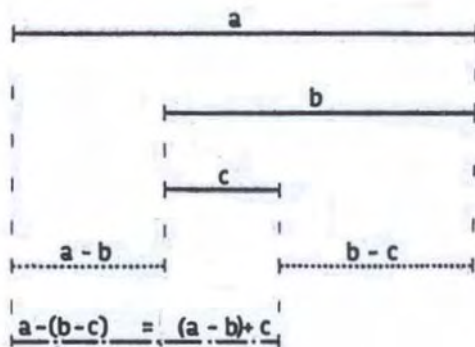
$$a+b=b+a$$



$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

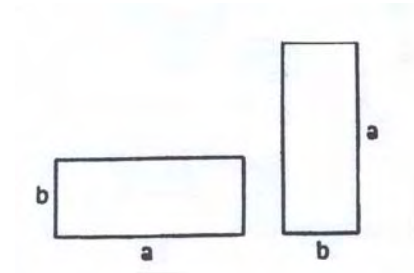


$$a-(b-c)=(a-b)+c$$

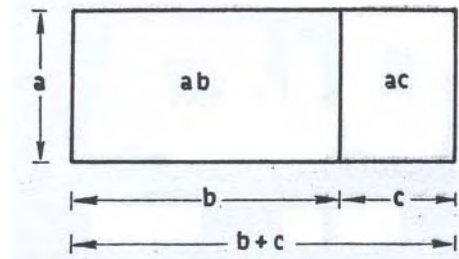


Ezeknél az egyenleteknél a jobb- és a baloldalt ugyanolyan hosszú szakasszal szemléltetünk, csupán a szakaszok felosztását változtatjuk.

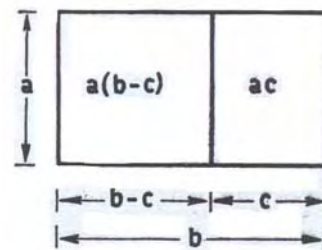
$$ab=ba$$



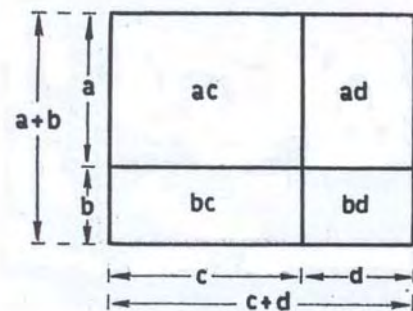
$$a(b+c)=ab+ac$$



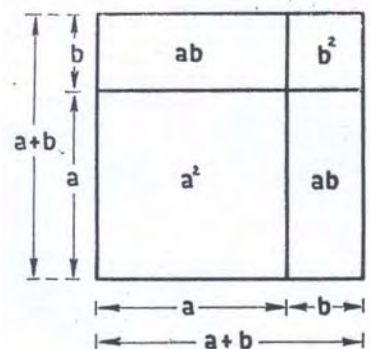
$$a(b-c)=ab-ac$$



$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

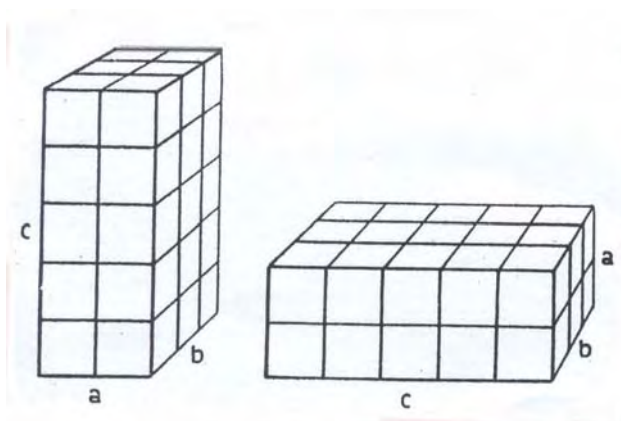


$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

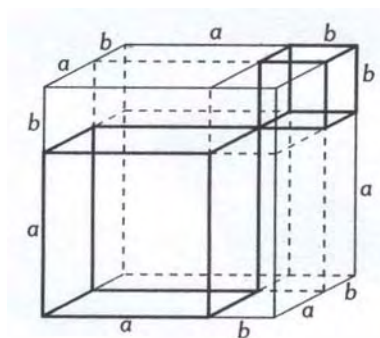


A kéttényezős szorzatoknál minden esetben egy-egy nagyobb téglalapot (négyzetet) építünk fel kisebb téglalapokból, négyzetekből. Ez felel meg az egyenlet jobb- és baloldalának.

$$(ab)c = a(bc)$$



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Három tényezőnél már ki kell lépni a térbe. Többtagú tényezők esetén nagyon elbonyolódik a szemléltetés, segítség és bizonyítás helyett inkább csak vizuális káoszt nyújt.

7. Összefoglalás

A dolgozatomban rávilágítottam, hogy a szemléltetésnek milyen fontos és meghatározó szerepe van a matematikában. Emeljünk ki két fogalmat a matematikai demonstráció kapcsán. Szükséges és lehetséges.

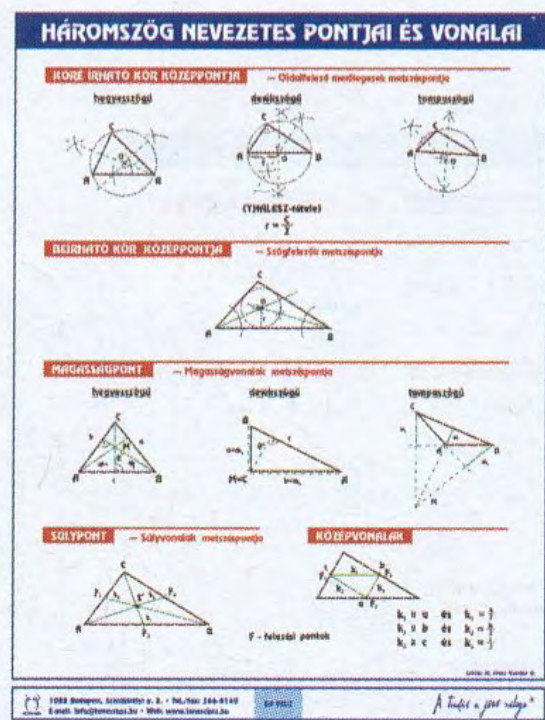
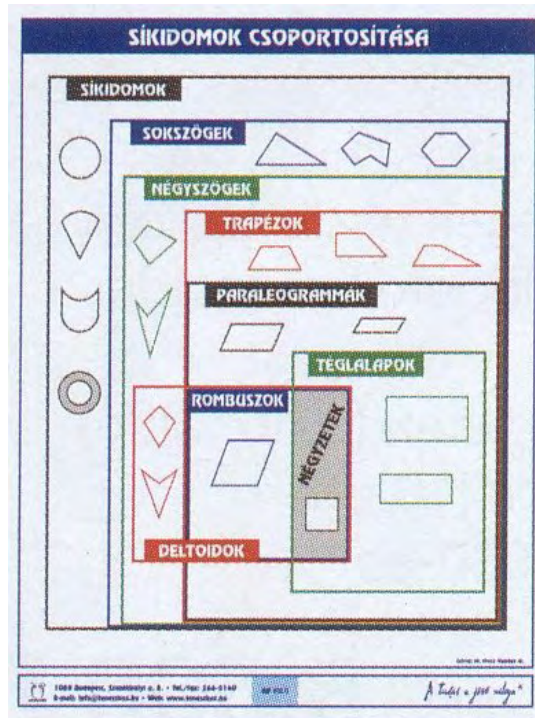
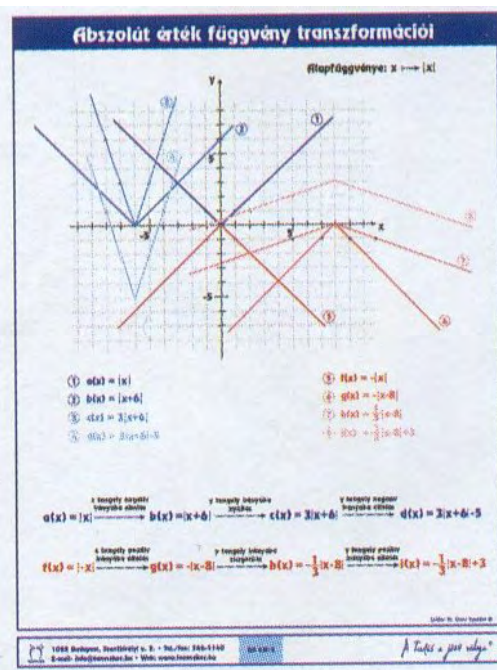
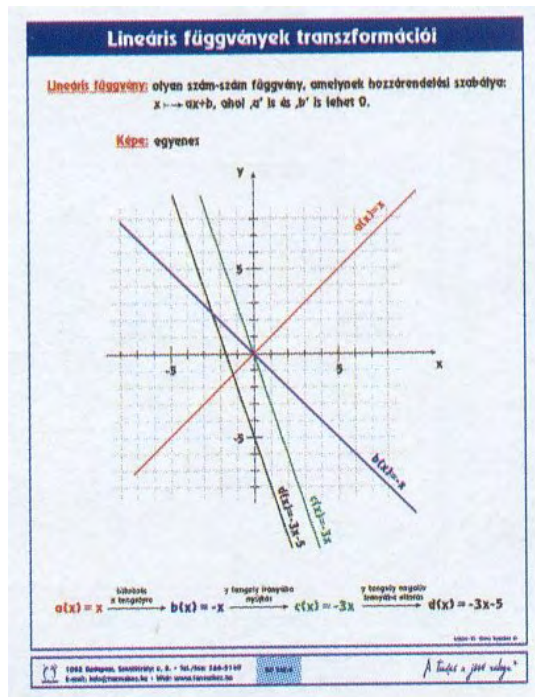
Szükséges, hiszen a felgyorsult technikai fejlődés, a tudásanyag elképesztő felduzzadása tetemes ismeret elsajátítását követeli meg a tanulóktól, aminek teljesítése egyre több korlátba ütközik. A szemléletesség ezeket a korlátokat igyekezik megmászhatóvá tenni. Másrészt a szükséges tudás minőségi igénye a „két lábon járó lexikon” típustól a kreatív, gyors, könnyen alkalmazható problémamegoldó képesség felé tolódik el. Az ilyen képesség és tudás kialakításában is jelentős szerepet vállal a szemléltetés, a szemléletesség, elsősorban a diákok által végzett szemlélődés és vizsgálat. Minden elmélkedésnél többet mond annak a néhány évtizede készült széleskörű felmérésnek az eredménye, amely a szemléletesség hatását vizsgálta. A tanulók 91%-a tudta megjegyezni azokat a magyarázatokat, amelyeket egy bemutatott kísérlethez fűzött a tanár, ha ugyanezeket a magyarázatokat csak képek illusztrálták, akkor a tanulók 50%-a jegyezte meg, a magyarázatokat kísérletek és képek nélkül a tanulók 24%-a jegyezte meg.

Lehetséges, mert bármilyen elvontnak látszik a mai matematika, lehet szemléltetni és meg lehet, sőt meg kell találni kapcsolatát mindennapi életünkkel. Lehetséges, mert a matematika nem elszeparált elméleti feladatok megoldására, hanem az élet során felmerülő konkrét, összetett problémák megfejtésére használható eljárás. A szemléletesség pedig amellet, hogy megkönnyíti ezt az eljárást, kapcsolatot teremt különböző tudományok között. A felmerülő problémák ugyanis a legritkább esetben tisztán matematikaiak, ezért aki nem ismeri a tantárgy kapcsolódásait és összefüggéseit más területekkel, az a gyakorlatban képtelen lesz tudását használni.

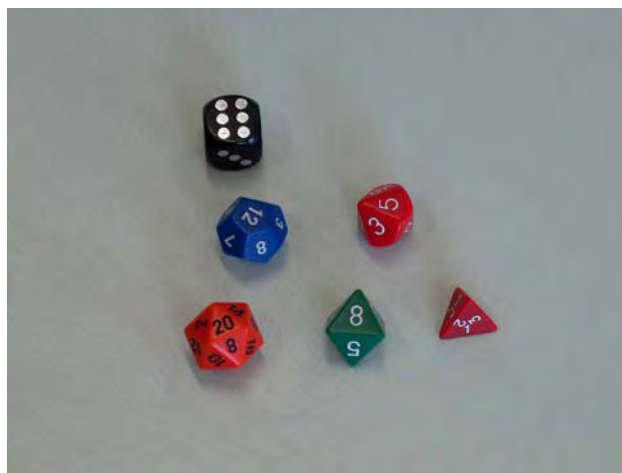
Ezenkívül a szemléltetés képes arra, hogy érzelmi kötődést alakítson ki a tantárgy és a tanuló között, ami természetesen a későbbi tudás mentális alapja. Ezt kiemelt szempontként kezeljük, hiszen az a diák, amelyik egyszer megutálta a matematikát, többé nem lesz képes olyan teljesítményre, mint korábban.

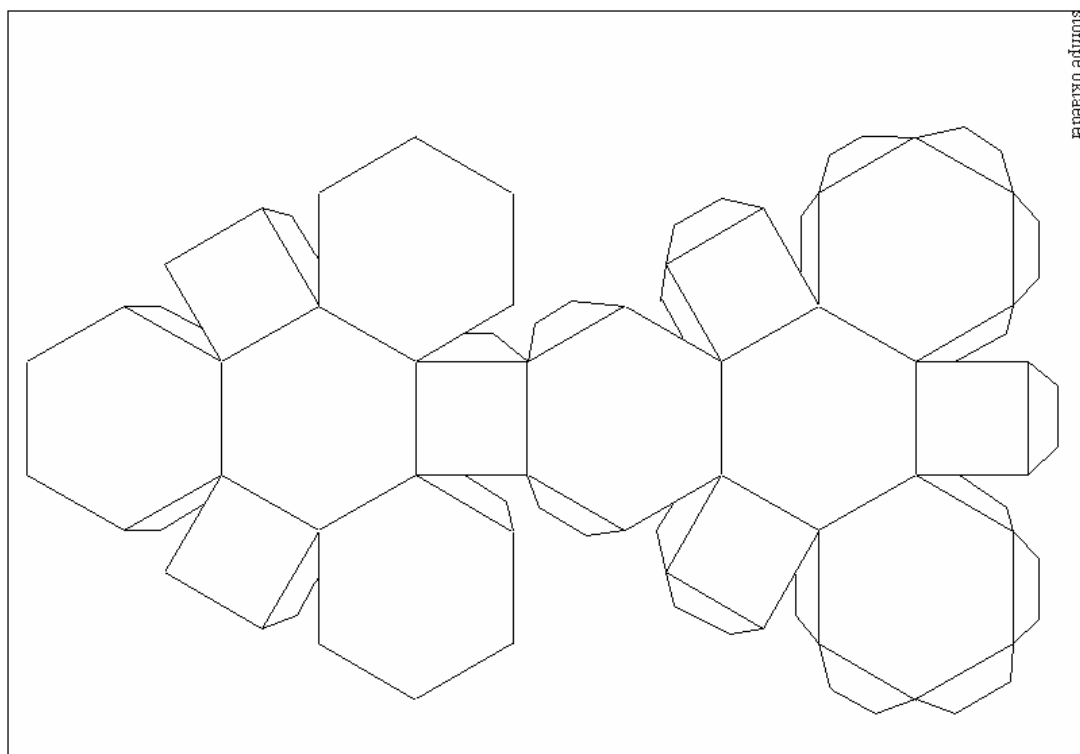
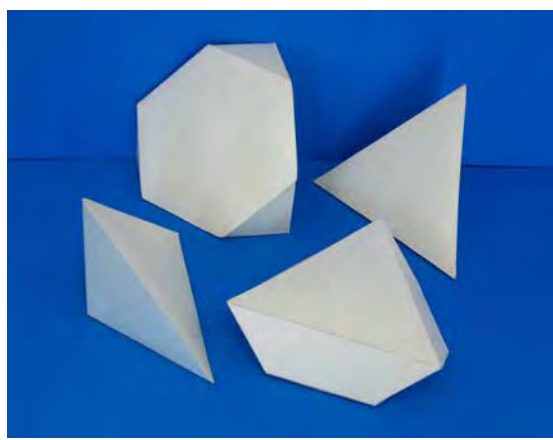
Melléklet

1. számú melléklet: Tablók

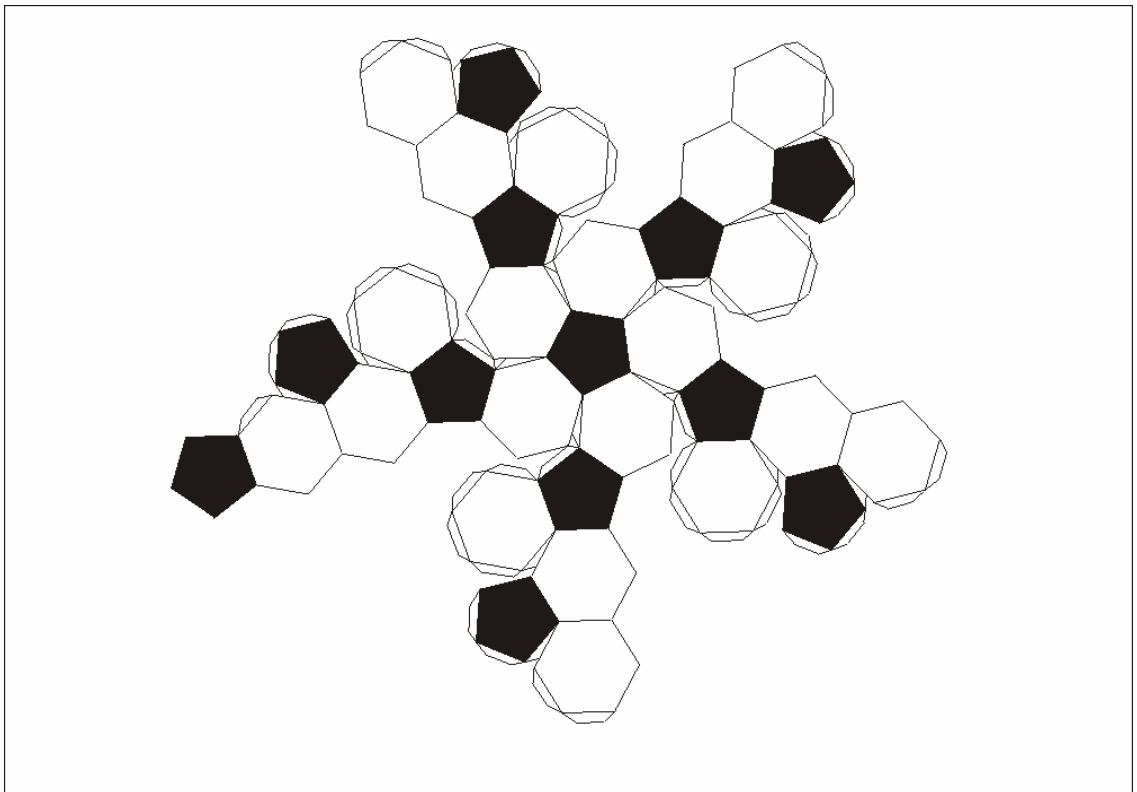
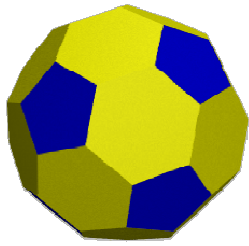


2. számú melléklet: Poliéderek





Stompe octaeder



great dirhombicosidodecahedron [75] - Microsoft Internet Explorer

http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/75.html

75: great dirhombicosidodecahedron

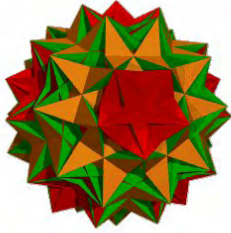
Wythoff Symbol: $\{3/2\ 5/3\ 3\ 5/2\}$

Vertex Configuration: $(4, 5/3, 4, 3, 4, 5/2, 4, 3/2)$

Number of Faces: 124
 Number of Edges: 240
 Number of Vertices: 60

Symmetry Group: icosahedral

Polyhedron has hemispherical faces



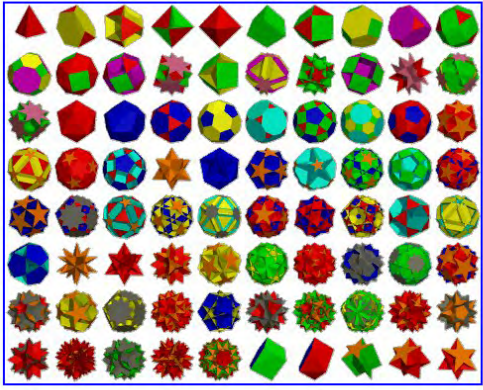
Programs and high-resolution images for uniform polyhedra are available in the book [The Mathematica Programmer II](#) by R. Maeder.

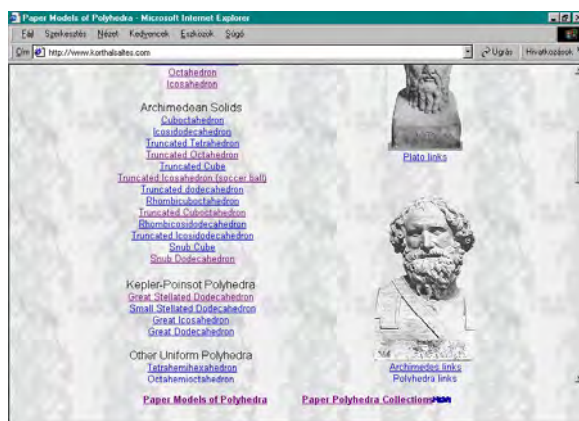
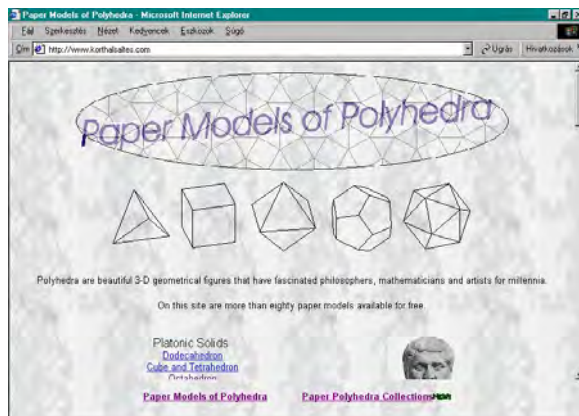
[All 75 uniform polyhedra](#), with background information, a clickable map, and animations.

Visual Index of all Uniform Polyhedra - Microsoft Internet Explorer

http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/list-graph.html

Visual Index of all Uniform Polyhedra



3. számú melléklet: Valóságközeli feladatok

A MCDONALD'S FŐBB TERMÉKEINEK KALÓRIA-, FEHÉRJE-, ZSÍR- ÉS SZÉNHIDRÁT TARTALMA				
Termék	Energia (kcal) (1 kcal = 4,184 kJ)	Fehérje (g)	Zsír (g)	Szénhidrát (g)
Szendvicsek				
Hamburger	246	12,4	8,9	29,0
Sajtburger	294	15,5	12,6	39,7
McRoyal	518	31,4	27,2	36,7
Big Mac	507	26,7	25,8	41,9
McChicken	439	17,3	21,7	43,6
Fish Mac	338	14,1	15,1	36,5
McFarm	551	24,4	35,0	34,9
Chicken Première	539	97,4	26,1	66,9
Csirkeszárnydarabok				
Csirkeszárnydarabok 3 db	286	19,9	19,1	15,2
Csirkeszárnydarabok 5 db	477	33,2	31,9	25,3
Chicken McNuggets				
Chicken McNuggets 6 db	276	19,1	15,7	14,6
Chicken McNuggets 9 db	414	28,6	23,5	21,9
Hasábburgonya				
Kis adag	248	2,6	12,8	30,7
Közepes adag	340	3,5	17,6	42,0
Nagy adag	497	5,1	25,7	61,4
McToast				
Sajtos	260	10,7	10,6	30,5
Sonkás	270	12,6	10,8	30,5
Baconos	390	18,5	21,8	31,0
Saláták				
Kertész saláta	14	0,9	0,1	2,3
Csirkes Cézár saláta	131	21,6	16,7	7,7
Ínyenc saláta	178	16,0	11,2	5,0
Öntetek/Hideg mártások				
Tálcás ketchup	4	0,0	0,1	0,7
Tálcás majonéz	123	0,0	12,6	0,9
1000 sziget öntet	216	0,6	20,8	6,7
Cézár öntet	131	0,6	12,6	4,3
Joghurtos-kapros öntet	147	0,7	14,3	2,6
Házias öntet	24	0,0	6,0	0,0
Olíva salátaolaj	120	0,0	14,0	0,0
Shake-ek				
Kis eper shake	216	6,0	5,8	34,9
Kis csoki shake	230	7,0	6,6	35,4
Kis vanília shake	219	6,0	5,8	35,6
Nagy eper shake	345	9,6	9,3	55,6
Nagy csoki shake	338	10,2	9,6	52,7
Nagy vanília shake	350	9,5	9,3	57,0



A McDONALD'S FŐBB TERMÉKEINEK KALÓRIA-, FEHÉRJE-, ZSÍR- ÉS SZÉNHYDRÁTTARTALMA

Termék	Energia (kcal) (1 kcal = 4,184 kJ)	Fehérje (g)	Zsír (g)	Szénhidrát (g)
Desszertek				
Almás táská	220	2,2	12,0	25,8
Eper McFreeze	231	5,6	5,1	40,5
Csokoládé McFreeze	278	7,1	9,3	41,2
Karamell McFreeze	276	6,5	7,9	44,8
Tölcséres McFreeze	136	4,6	3,8	21,0
Cappuccino McFlurry	321	9,5	10,4	47,4
Smarties McFlurry	363	8,3	11,8	55,8
Alom Pite	416	6,3	18,5	56,1
Italok				
Kis Coca-Cola	110	-	-	27,5
Közepes Coca-Cola	176	-	-	44,0
Nagy Coca-Cola	220	-	-	55,0
Kis Fanta	100	-	-	25,0
Közepes Fanta	160	-	-	40,0
Nagy Fanta	200	-	-	50,0
Kis Sprite	100	-	-	25,0
Közepes Sprite	160	-	-	40,0
Nagy Sprite	200	-	-	50,0
Kis Coca-Cola Light	0	-	-	0,1
Közepes Coca-Cola Light	0	-	-	0,1
Nagy Coca-Cola Light	1	-	-	0,2
Narancs Juice	103	1,5	-	22,0
Nestea citrom	152	-	-	38,0
Nestea barack	152	-	-	38,0
Nescafé Frappé	77	3,0	1,0	14,0
Forró italok				
Forró csokoládé	130	4,2	1,6	27,0
Cappuccino	61	3,5	0,1	11,5
Eszipresszó kávé	4	0,3	-	0,8
Hosszú kávé	5	0,4	-	0,9
Csokis cappuccino	111	4,8	0,3	22,1

NAPI ENERGIASZÜKSÉGLET
(nagy részt ülő munkát végző emberek esetében)

15-19 év	nő	2400 kcal	(10 000 kJ)
	férfi	3000 kcal	(12 500 kJ)
20-25 év	nő	2200 kcal	(9000 kJ)
	férfi	2600 kcal	(11 000 kJ)
26-51 év	nő	2000 kcal	(8500 kJ)
	férfi	2400 kcal	(10 000 kJ)



Irodalomjegyzék

Dr. Ádám Sándor: Taneszközök Magyarországon

Ambrus Gabriella: A matematika alkalmazásai az oktatásban - a
gyakorlatorientált matematikaoktatás tegnap és ma

Balogh Jenő: A vizuális nevelés pedagógiája

Bárány Ignác: Tanítók könyve

Bihari Péter: Népiskolai oktatástan

Bíró Ferenc: A dia, mint szemléltetőeszköz a magyar oktatás történetében

Boglári: Szemléltető oktatás a népiskolában

Comenius: Didactica Magna

David Fielker: Geometria mint matematikai tevékenység

Dombai Sándor: A matematikai szemlélet vizuális megalapozása

Falus Iván: Didaktika

Fogl János: Ecce Avena!

Hámori József: Az idegsejttől a gondolatig

Hámori József: A veszélyeztetett értelem

Jung Miklós: Szemléltető szemléltetés

Dr. Kántor Sándorné Dr. Varga Tünde: Papírhajtogatás a geometria
tanulásában

Kántor Sándorné - Varga Tünde: A vizualizáció és a modellek szerepe az
oktatásban

Karin Elke Krüll: A diszkalkuliás (számolásgyenge) gyerekek

Kárpáti Andrea: Az informatikai társadalom iskolája

Környei János: A tanító az iskolában

Környeiné Gere Zsuzsa: A látásról

Lénárd András: Az internet hatásai a 10-14 éves korosztályra

Lukács Gyula: Az iskola szépsége

Nádasi Mária: A szemléltetés pedagógiai-didaktikai megalapozása

Orosz Sándor: Korszerű tanítási módszerek

Papp Olga - Szilágyi István - Török Tamás: Így is taníthatjuk a matematikát

Péter Rózsa - Gallai Tibor: Népszerű algebra

Rókusfalvy Pál: Ábrák szerepe a matematikai problémamegoldó
gondolkodásban

Tóth Béláné: Az ábrák szerepe a tanulásban

Tóth Sándor: Keressünk szemléletes megoldásokat!

Trunkli László: A szemléltetés pszichológiája

Verédy Károly: Pedagógiai encyclopaedia

Warga János: Nevelés – és oktatástan alapvonalai képezdek számára és
magánhasználatra

Internet címek:

www.ac-noumea.nc/math/amc/polyhedr/index_e.htm

www.mathconsult.ch/showroom/unipoly

www.georgehart.com

www.korthalsaltes.com